

## **Параллельные Алгоритмы и Адаптивные Методы численного решения многомерного уравнения переноса**

**И.М. Беляков, А.В. Алексеев, В.В. Евдокимов, А.А. Нуждин,  
В.Ю. Резчиков, Р.М. Шагалиев\***

\*Russian Federal Nuclear Center, All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics (RFNC-VNIIEF), 607190, Mira av., 37, Sarov, N.-Novgorod reg., Russia. E-mail: [wht@md08.vniief.ru](mailto:wht@md08.vniief.ru)

*Рассмотрены методы распараллеливания и применение адаптивных сеток в фазовом пространстве при решении многомерного уравнения переноса в групповом кинетическом приближении.*

### **Введение**

Численное моделирование многомерных процессов переноса частиц является одним из наиболее сложных и трудоемких по затратам вычислительного времени задач прикладной математики.

Следует отметить особую сложность решения проблемы в общем случае, когда краевая задача для уравнения переноса ставится в областях сложной формы и это уравнение аппроксимируется на неортогональных пространственных сетках. Для численного решения таких задач, как правило, используются неявные схемы по переменной времени, а система сеточных уравнений на шагах по времени решается методом бегущего счета. Это означает, что сеточные уравнения переноса в ячейках сетки на данном временном шаге разрешаются в строго определенной последовательности, причем эта последовательность разная для разных направлений полета частиц и изменяется на временных шагах. Иначе говоря, при решении уравнения переноса в кинетическом приближении на мультипроцессорных системах отсутствует возможность для предварительного определения топологии связей (порядка обменов информацией) между процессорными элементами, что принципиально усложняет проблему разработки эффективных алгоритмов распараллеливания задач переноса.

Во многих задачах численного моделирования процесса переноса возникает ситуация, когда в некоторой пространственной подобласти необходимо найти численное решение с более высокой точностью, и эта подобласть перемещается в пространстве с течением времени. Например, такой подобластью может являться окрестность фронта волны при решении задачи переноса рентгеновского излучения. В таких случаях для обеспечения высокой точности получаемого численного решения необходимо использовать подробную пространственную сетку в некоторой перемещающейся в пространстве с течением времени подобласти счетной области. Количество ячеек опорной сетки, содержащихся в отмеченной выше подобласти, как правило, значительно меньше числа всех ячеек опорной сетки, что обеспечивает и относительную экономичность расчетов на таких адаптивных сетках.

В данном докладе приведены результаты применения некоторых алгоритмов распараллеливания многомерного нестационарного кинетического уравнения переноса в многогрупповой постановке на неортогональных пространственных сетках. Также рассмотрено применение адаптивных методов решения многомерного уравнения переноса с применением дробных сеток в фазовом пространстве.

## Постановка Задачи

Методика основывается на кинетической модели описания процессов переноса с использованием классической интегрально-дифференциальной формы записи нестационарного многомерного кинетического уравнения. (Шагалиев Р. М., Беляков И. М. и др., 1999)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N_i}{v_i} \right) + LN_i + \alpha_i N = F_i, \quad F_i = \frac{(\beta_{ij} n_j^{(0)} + Q_i)}{4\pi} \quad (1)$$

$$LN_i \equiv \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \sqrt{1-\mu^2} \cdot \cos \varphi \cdot N_i \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu N_i) + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \cdot \sin \varphi \cdot N_i \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \cdot \sin \varphi \cdot N_i \right),$$

$$n_i^{(0)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} N_i d\varphi \quad (2)$$

где:

$r, z, \Phi$  – цилиндрические координаты положения частицы.  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\mu, \varphi)$  – единичный вектор в направлении полета частицы;  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  – угол между вектором  $\vec{\Omega}$  и осью  $Z$ ;  $\varphi$  – угол между проекцией вектора  $\vec{\Omega}$  на плоскость, проходящую через точку  $(r, z, \Phi)$  перпендикулярно оси  $Z$ , и вектором в этой плоскости, направленным из точки оси  $Z$  к рассматриваемой точке  $(r, z, \Phi)$ ;  $-1 < \mu < 1$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ .

$\alpha_i = \alpha_i(t, r, z, \Phi)$ ;  $\beta_{ij} = \beta_{ij}(t, r, z, \Phi)$  – коэффициенты столкновения и размножения частиц;

$N_i = N_i(t, r, z, \Phi, \mu, \varphi)$  – поток частиц, летящих в направлении  $\mu, \varphi$ ;

$Q_i = Q_i(t, r, z, \Phi)$  – независимый источник частиц.

Система (1) решается в области фазового пространства

$$D = \{(r, z) \in L(\Phi), \Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2, -1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \quad (3)$$

$L(\Phi)$  – сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось  $Z$ ;

$\Phi_1, \Phi_2$  – ограничивающие область решения сечения:  $\Phi_1 = \text{const}$ ,  $\Phi_2 = \text{const}$ ,  $0 \leq \Phi_1 \leq \Phi_2 \leq 2\pi$ .

Граничное условие на внешней поверхности задается при  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0$  в виде:

$$N_i(t, r, z, \Phi, \mu, \varphi)_{(r, z) \in \Gamma(\Phi)} = \psi_{1i}(t, r, z, \Phi, \mu, \varphi). \quad (4)$$

Где  $\Gamma = \Gamma(\Phi)$  – образующая тела вращения;  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности тела вращения;  $\psi_{1i}(t, r, z, \Phi, \mu, \varphi)$  – заданная функция.

Начальное условие задается в виде:

$$N_i(t, r, z, \Phi, \mu, \varphi)|_{t=0} = \psi_{2i}(t, r, z, \Phi, \mu, \varphi). \quad (5)$$

Где  $\psi_{2i}(t, r, z, \Phi, \mu, \varphi)$  – заданная функция.

### Методы аппроксимации и решения

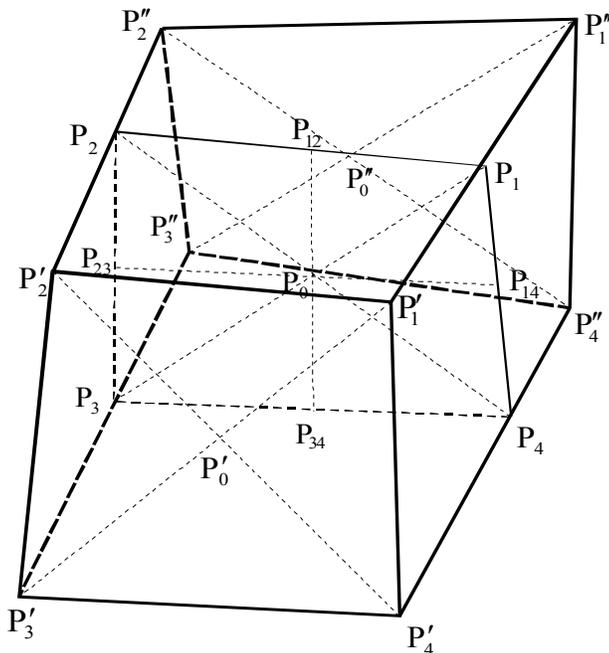
Аппроксимация уравнения переноса по переменной времени неявной двухслойной разностной схемой. Аппроксимация уравнения переноса по угловым переменным строится по схеме метода дискретных ординат.

Пространственная аппроксимация уравнения переноса строится на регулярных пространственных сетках с использованием методов конечных разностей на шаблоне, содержащем решения в центрах на ребрах и в узлах ячейки.

На шаге по времени система уравнений решается итерационным по правой части методом. На каждой итерации системы сеточных уравнений с заданной правой частью решаются последовательно по направлениям полета. Для решения системы сеточных уравнений переноса с заданной правой частью применяются явные экономичные алгоритмы «бегущего счёта».

Свойства схемы с расширенным шаблоном (см. рис.1):

- консервативна;
- сходимость к решению уравнения переноса со вторым порядком точности на произвольных неортогональных пространственных сетках;
- выполнение условия диффузионного предела в оптически плотных средах;
- использует квадратуры DS<sub>n</sub>-метода для аппроксимации уравнения переноса по угловым переменным.



**Рисунок 1.** Ячейка пространственной сетки и искомые функции.

## **Параллельные Методики**

Мелкоблочный алгоритм распараллеливания при решении 2D и 3D задач на структурированных сетках.

Распараллеливание по энергетическим группам и направлениям полета нейтронов при решении 2D задач на структурированных и неструктурированных сетках.

Конвейерный алгоритм распараллеливания по слоям и направлениям полета нейтронов при решении 3D задач на структурированных сетках.

Комбинирование мелкоблочного алгоритма и распараллеливания по энергетическим группам при решении 2D и 3D задач на структурированных сетках.

Алгоритм мелкоблочного распараллеливания использующий принцип пространственной декомпозиции областей исходной системы на подобласти (Алексеев А. В., Шагалиев Р. М., Нуждин А. А., 2002). Разбиение на подобласти, помещаемые на отдельные процессоры, (в дальнейшем *параобласти*) производится здесь только по одному из пространственных направлений, а именно, по столбцам пространственной сетки (1D декомпозиция) либо по столбцам и строкам (матричная 2D декомпозиция).

Основные положения алгоритма мелкоблочного распараллеливания с декомпозицией по таковы: (R. M. Shagaliyev, I. M. Belyakov et al., 2003)

- использование пространственной декомпозиции области на параобласти;
- независимое по угловой переменной решение системы сеточных уравнений;
- каждая параобласть для текущего направления разрешается с внутренними граничными условиями, вычисленными на текущей итерации, что позволяет сохранить точность решения и не дает увеличения общего числа итераций, по сравнению с последовательной методикой;
- полное совмещение межпроцессорных обменов со счетом, что достигается при помощи использования асинхронных операций приема/передачи.

В качестве тестовой задачи для исследования эффективности распараллеливания программы решения двумерного уравнения переноса с матричной декомпозицией использовалась однообластная сферически-симметричная задача переноса в одноклассовом приближении. Пространственная сетка состояла из 1200 строк и 1200 столбцов. Для анализа влияния на эффективность распараллеливания числа интервалов по угловой переменной задача считалась с угловой сеткой, содержащей 6, 8, 12 и 14 интервалов по  $\mu$ . Считалось 5 счетных шагов с 6-ю итерациями на каждом. Число процессоров подбиралось таким образом, чтобы счет на процессорах был сбалансированным, то есть на каждом процессоре рассчитывалось одинаковое число точек. Сравнительные результаты представлены на рис. 2.

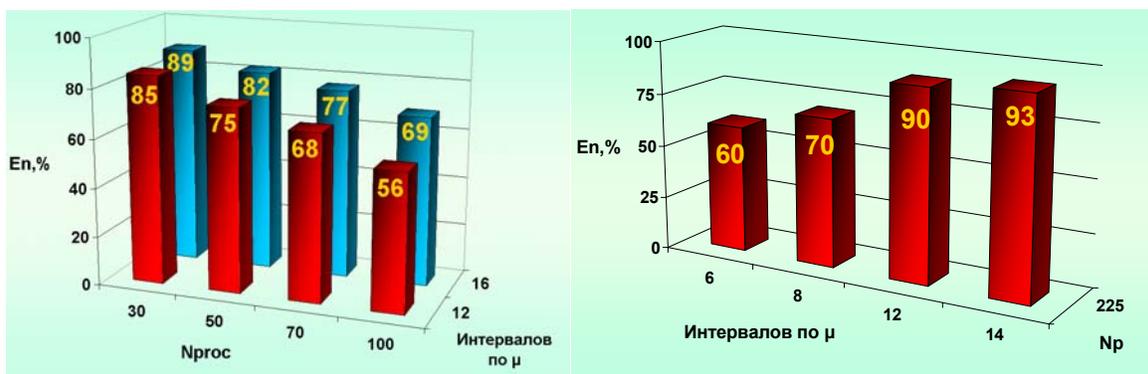


Рисунок 2. Сравнение 1D и 2D декомпозиции.

Требования повышения точности решения многогрупповых задач переноса обуславливают необходимость использования при численном моделировании большого количества интервалов по энергетической переменной (групп). Комбинированный алгоритм распараллеливания сочетает в себе распараллеливание по пространственным и энергетическим переменным.

При решении многогруппового уравнения переноса расчет различных интервалов по энергетической переменной можно проводить независимо, каждый на своем процессоре (группе процессоров). Такой подход позволяет использовать при решении двумерного кинетического уравнения значительное количество процессоров при сохранении приемлемой эффективности.

В качестве тестовой была выбрана следующая модельная задача. Одна область, представляющая собой полусферу. Число строк – 80 равномерно по радиусу, число столбцов – 200 равномерно по углу. Порядок угловой квадратуры 12, всего 96 направлений полета частиц. Число энергетических групп 28.

Значения коэффициента ускорения и эффективности распараллеливания, полученные в ходе численных исследований, приведены в таблице 1. Для каждого расчета приведено общее число процессоров, а также количество параобластей при распараллеливании по пространству и количество группобластей при распараллеливании по группам.

Таблица 1. Значения коэффициента ускорения ( $S_p$ ) и эффективности распараллеливания ( $E$ ).

Number of Processors	Number of Group-domains	Number of Para-domains	$S_p$	$E$ (%)
7	7	1	5.5	78
25	1	25	25.4	102
28	28	1	12.3	44
100	1	100	66.2	66
100	4	25	74.9	75
200	1	200	92.7	46
200	4	50	111.7	56

## *Proceedings from the 5LC 2005*

При решении пространственно трехмерных задач используется алгоритм распараллеливания по конвейерной схеме (Алексеев А. В., Шагалиев Р. М., 1993). Декомпозиция производится по слоям системы.

Рассматривается решение задачи содержащей ~1000000 пространственных точек (144 слоя). Число энергетических групп 26, число гармоник анизотропии рассеяния 5. Порядок угловой квадратуры 8, всего 96 направлений полета частиц.

**Таблица 2. Значения эффективности распараллеливания (E).**

<b>Number of Processors</b>	9	18	36	72	144
<b>E (%)</b>	92	85	81	78	76

## **Основные Положения Адаптивного Метода**

Рассмотрим применение адаптивных дробных пространственных, угловых и энергетических сеток при решении многомерного уравнения переноса. (Шагалиев Р. М., 2004).

### **Основные положения адаптивного метода по пространственным переменным**

- Каждая ячейка опорной пространственной сетки может быть разбита на более мелкие ячейки адаптивной дробной сетки (адаптивные ячейки).
- Адаптивная дробная сетка строится путем равномерного разбиения по каждому пространственному направлению на число интервалов  $2^N$ , где N – уровень адаптивной сетки.
- При построении адаптивной по пространству сетки анализируются значения функции температуры излучения в ячейках опорной сетки. Разбиение каждой опорной ячейки пространственной сетки производится независимо по строкам и по столбцам.
- Порядок разрешения пространственных ячеек при организации бегущего счета определяется на опорной сетке. При наличии в ячейке адаптивной сетки производится решение подсистемы уравнений, отвечающей аппроксимации уравнения переноса на адаптивной сетке в данной ячейке.
- При перестроении адаптивной сетки переинтерполяция сеточных величин производится нормированным консервативным интегрированием с весами.

Уравнение переноса решается в циклах по угловым переменным. При решении двумерного кинетического уравнения в цикле по направлениям угловой сетки на опорной пространственной сетке используется стандартный метод бегущего счета.

При решении уравнения переноса на адаптивной пространственной сетке используется тот же самый метод бегущего счета, в том числе, и внутри опорных ячеек.

### **Основные положения адаптивного по угловым переменным алгоритма**

Рассмотрим основные положения адаптивного метода аппроксимации по угловым переменным уравнения переноса:

## *Proceedings from the 5LC 2005*

Опорная сетка по угловым переменным является основной сеткой, на которой осуществляется численное решение уравнения переноса на временных шагах. В процессе счета задачи опорная сетка не укрупняется, но возможно дробление отдельных интервалов по угловым переменным  $\mu$  и  $\varphi$  опорной сетки на более мелкие интервалы. Подчеркнем, что дробление осуществляется строго внутри интервалов опорной сетки. Говоря иначе, не допускается наличие в более мелкой угловой сетке адаптивного метода таких интервалов, точки которых частично принадлежат одному интервалу, а частично – другому интервалу опорной сетки.

Дробление угловой сетки осуществляется только для выбранного множества пространственных ячеек. В нестационарных расчетах элементы данного множества, как правило, фиксируются на одном временном шаге, но допускается их изменение (дополнение либо сужение) при переходе на следующий временной шаг. В разных пространственных ячейках допускается дробление на разное число более мелких интервалов по переменным  $\mu$  и  $\varphi$  опорной угловой сетки.

Выбор множества пространственных ячеек, где необходимо дробление угловой опорной сетки на более мелкие интервалы сетки адаптивного метода, осуществляется с использованием специальных критериев. С помощью данных алгоритмов определяется также тип дробления, в том числе количество подинтервалов, на которые разбивается соответствующий интервал опорной угловой сетки. Приведем некоторые возможные критерии:

- анализ градиентов искомой функции по угловым переменным и подключение адаптивного метода в тех пространственных точках и в тех интервалах угловой сетки, где решение претерпевает изменения, превышающие некоторые заданные значения;
- определение фронта тепловой волны с целью подключения адаптивного метода на фронте (или на фронте и за фронтом тепловой волны);
- подключение адаптивного метода в заданном числе приграничных точек (строк, столбцов), число которых может изменяться с учетом особенностей поведения решения по времени.

### **Адаптивный по энергетическим переменным алгоритм**

При аппроксимации уравнения переноса на адаптивной сетке по энергетической переменной требуется решение следующих вопросов:

- Разработка критериев и алгоритмов дробления опорной энергетической сетки на более подробные энергетические интервалы (группы) в тех пространственных точках и в тех интервалах опорной энергетической сетки, где решение по энергетической переменной претерпевает значительные изменения.
- Построение аппроксимации по энергетической переменной уравнения переноса на адаптивной сетке.
- Построение обобщенного метода бегущего счета для численного решения многогрупповых сеточных уравнений переноса адаптивной схемы.

На этапе введения более подробных энергетических интервалов (групп) адаптивного метода (адаптивной сетки) внутри одного интервала опорной сетки задаются коэффициенты

и разностные операторы для уравнений, отвечающих за перенос энергии (частиц) в интервалах этой адаптивной сетки. При расчете этих коэффициентов и построении разностных операторов, аппроксимирующих интеграл столкновения, важно учитывать два следующих обстоятельства. Во-первых, для выполнения указанной работы необходимо приближенное задание распределения искомого решения по группам адаптивной сетки, введенной внутри указанного одного интервала опорной сетки. Этот закон распределения в ряде случаев может быть задан заранее с учетом особенностей постановки того или иного класса задач (равновесное распределение энергии фотонов по функции Планка, распределение по спектру других заданных независимых объемных источников, распределение по спектру входящего через границу потока частиц и т.п.). Во-вторых, при расчете коэффициентов и разностных операторов групповых уравнений переноса, отвечающих интервалам адаптивной сетки, представляется необходимым обеспечение условия консервативности. Говоря по-другому, требуется, чтобы суммарное количество поглощенных частиц (энергии) в интервалах адаптивной сетки строго соответствовало количеству поглощенных частиц (энергии) в соответствующем интервале опорной сетки. Аналогичному требованию должны удовлетворять другие коэффициенты, а также введенные разностные операторы.

### Примеры Решения Задач

Для верификации и оценки эффективности реализованного адаптивного по пространственным переменным метода были проведены численные исследования на ряде задач. В таблице 3 представлены параметры тестовых задач.

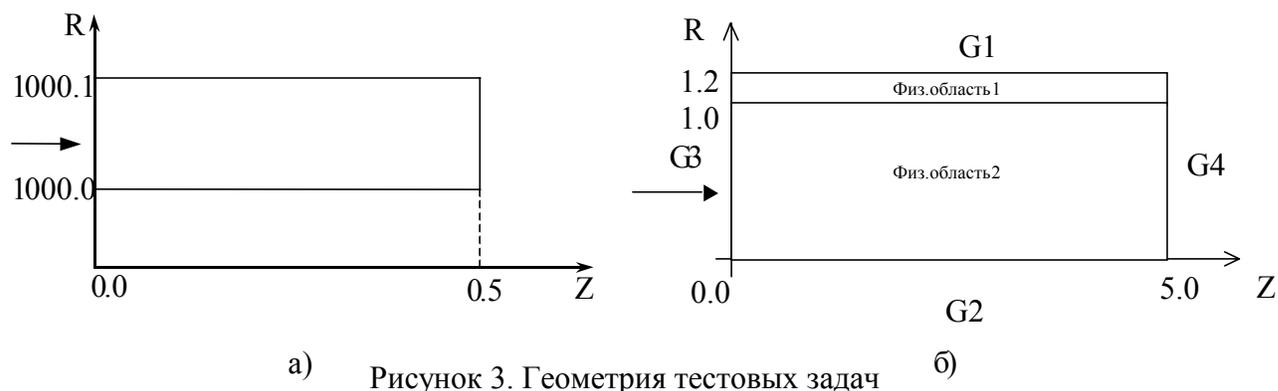


Таблица 3. Параметры тестовых задач

	Задача 1	Задача 2
Характер задачи	Одномерный	Существенно двумерный
Геометрические параметры	См. Рисунок 3а.	См. Рисунок 3б.
Граничные условия	На левой границе входящий поток излучения, соответствующий $\varepsilon(0, \mu, t) = \frac{ct}{c + (cC_1\mu + 1)},$ $\mu > 0, C_1 = -0.85903205\dots$	На левой границе: на части, относящейся к плотному кожуху - “зеркального отражения”, на части, относящейся к прозрачной области - входящий изотропный поток излучения,

	где $\varepsilon(z, \mu, t)$ – интенсивность излучения, умноженная на $\pi$ .	соответствующий температуре $T=1$ . На верхней границе и правой торце - входящий поток излучения, равный нулю.
Зависимость энергии от температуры	$E = 2058 * T^4$	$E = C_v T$ , где $C_v = 0.81$ .
Сечение поглощения	$\chi_a = \frac{1}{2058 * T^4}$	$\chi_a = \frac{A}{T^3}$ , где $A=50.89$ в 1-ой физ. области; $A=0.1374$ во 2-ой физ. области.

### Задача 1

В качестве опорной пространственной сетки, на которой работали адаптивные алгоритмы, использовалась сетка из 10 строк и 25 или 50 столбцов. Расчеты с применением адаптивной методики практически совпадают с расчетом на самой мелкой пространственной сетке с 400 столбцами, а также с аналитическим решением. Такой результат подтверждает правильность работы адаптивных алгоритмов.

Сравнение времени счета задачи показало, что адаптивный расчет с максимальным разбиением опорной пространственной сетки на 8 ячеек при практическом совпадении результатов с расчетом по стандартной методике на пространственной сетке, имеющей 200 столбцов, требует в 6.2 раз меньше времени. Аналогичное сравнение расчета на сетке с 400 столбцами по стандартной программе без адаптивности и адаптивных расчетов с разбиением опорных ячеек на 16 и на 8 адаптивных ячеек дает выигрыш по времени счета в 9 и 5.6 раза, соответственно, при сохранении заданной точности.

### Задача 2

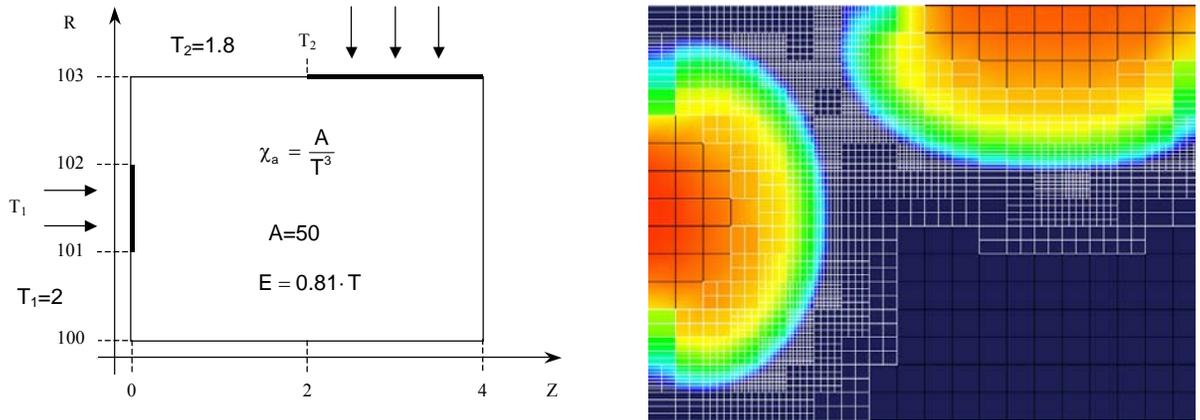
В качестве опорной сетки по пространственным переменным для расчета с использованием адаптивного алгоритма была выбрана сетка, содержащая 10 строк (по 5 в каждой области) и 50 столбцов ( $NR=10$ ,  $NZ=50$ ). Уровень адаптивного разбиения выбран такой, чтобы максимальное измельчение соответствовало сеткам по пространственным переменным с разбиением  $NR=40$ ,  $NZ=200$  и  $NR=80$ ,  $NZ=400$ .

Решение на адаптивной сетке  $NR=10$ ,  $NZ=50$  с максимальным разбиением на 8 адаптивных ячеек близко к расчету на самой мелкой пространственной сетке –  $NR=60$ ,  $NZ=300$ , адаптивный расчет при этом требует в 4.8 раза меньше времени. В расчетах с меньшим уровнем адаптивности (максимальное разбиение на 4 адаптивные ячейки в каждом направлении) на сетке  $NR=10$ ,  $NZ=50$  было получено близкое по точности решение к расчету  $NR=40$ ,  $NZ=200$  при экономии времени счета в 8.9 раз.

### Задача 3

Рассматривается цилиндрический слой ( $0 \leq Z \leq 4$ ;  $100 \leq R \leq 103$ ). Опорная пространственная сетка содержит 20 столбцов и 15 строк. При проведении расчета разрешалось строить адаптивные сетки не выше 3 порядка (максимальное разбиение на 8

ячеек по обоим пространственным направлениям). На рисунке 4 представлены геометрия задачи и поле температуры излучения на адаптивной пространственной сетке.



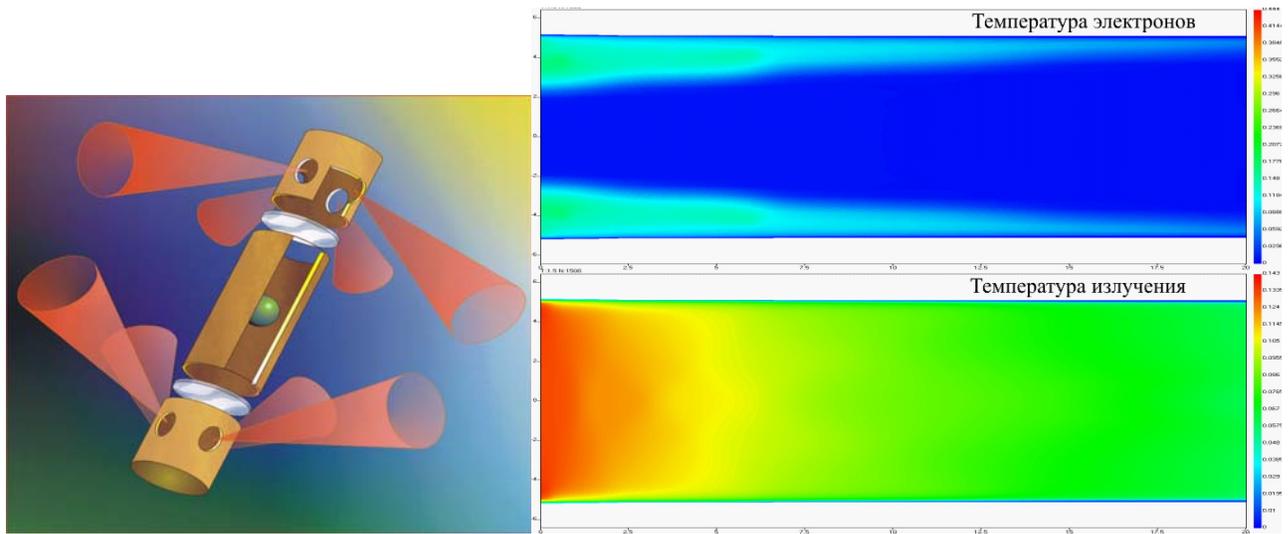
**Рисунок 4.** Постановка расчета и поле температуры на промежуточный момент времени.

Следующие две задачи демонстрируют возможности методики при решении задач инерциального лазерного синтеза с использованием многогруппового кинетического уравнения для описания процесса переноса излучения. (Бельков С. А., Беяков, И. М., 2004)

### Цилиндрический канал мишени ИЛЛЮМИНАТОР

В задаче учитывается процесс переноса неравновесного излучения в групповом кинетическом приближении и газодинамическое движение вещества.

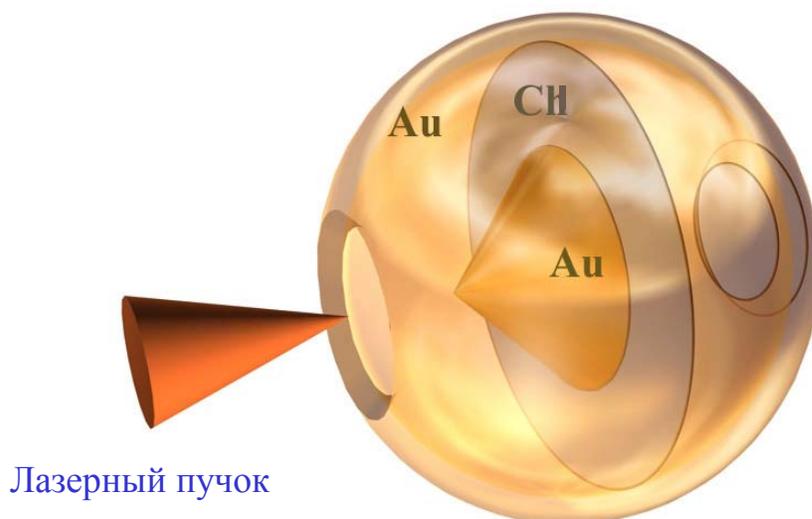
На рисунке 5 представлены схема мишени ИЛЛЮМИНАТОР и рассчитанные пространственные распределения температур вещества и излучения в цилиндрическом канале на промежуточный момент времени.



**Рисунок 5.** Схема мишени и пространственные распределения температур.

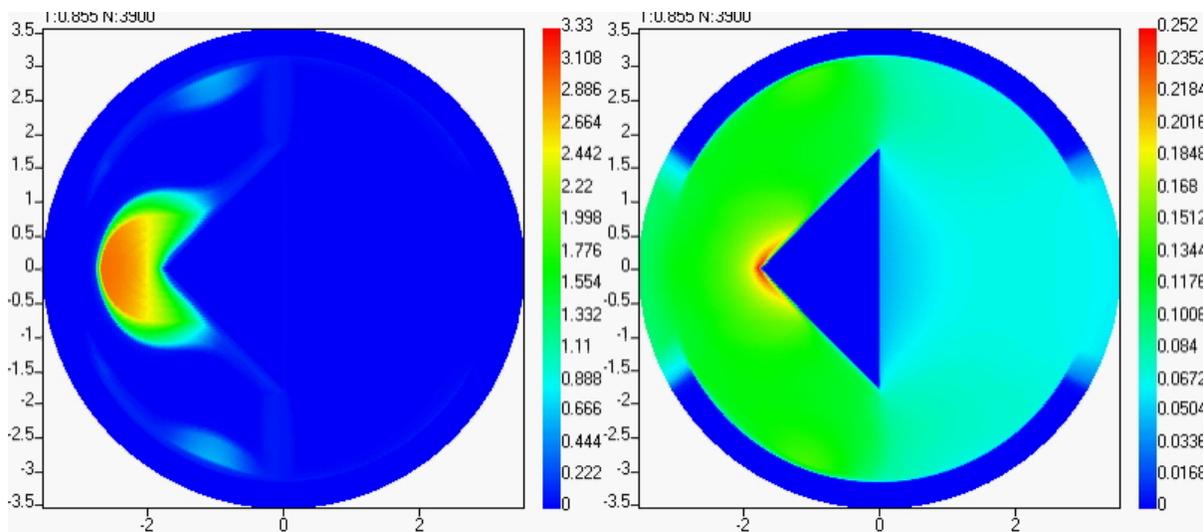
**Мишень ЛАБИРИНТВ** задаче учитывается процесс переноса неравновесного излучения в групповом кинетическом приближении и газодинамическое движение вещества.

На рисунке 6 представлены схема мишени ЛАБИРИНТ



**Рисунок 6.** Схема мишени ЛАБИРИНТ.

На рисунке 7 представлены рассчитанные пространственные распределения температур вещества и излучения мишени ЛАБИРИНТ на промежуточный момент времени.



**Рисунок 7.** Пространственные распределения температур вещества и излучения.

## Заключение

В докладе представлены параллельные алгоритмы и адаптивные методы решения многогруппового кинетического уравнения переноса. Приведены результаты численных исследований эффективности алгоритмов распараллеливания и адаптивного по пространству метода решения многомерного многогруппового уравнения переноса. Сформулированы

основные положения создаваемых адаптивных по энергетическим и угловым переменным фазового пространства методов решения уравнения переноса. Использование этих алгоритмов и методов по отдельности и особенно в совокупности позволит многократно сократить время, необходимое для численного решения многомерного многогруппового уравнения переноса.

## **Благодарности**

Контракт №37713-000-02-35 задача 014 между Лос-Аламосской национальной лабораторией Калифорнийского Университета США и РФЯЦ-ВНИИЭФ г. Саров

Контракт № B526462 между Ливерморской национальной лабораторией им. Лоуренса Калифорнийского Университета США и Лабораториями Сарова г. Саров

Контракт № B541415 между Ливерморской национальной лабораторией им. Лоуренса Калифорнийского Университета США и Лабораториями Сарова г. Саров

## **Ссылки**

Шагалиев Р. М., Беляков И. М., Алексеев А. В., Евдокимов В. В., Звенигородская О. А., Москвин А. Н., Плетенева Н. П., Федотова Л. П., Шумилин В. А., Математическое моделирование и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе САТУРН-3 / ВАНТ. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1999. Вып. 4. с. 20-26.

Алексеев А. В., Шагалиев Р. М., Нуждин А. А. Метод мелкозернистого распараллеливания двумерных и трехмерных задач переноса на неортогональных сетках // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. Выпуск 3. Саров. 2002. С. 96-109.

Алексеев А. В., Шагалиев Р. М. Алгоритмы распараллеливания численного решения трехмерного уравнения переноса в комплексе САТУРН // ВАНТ. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1993. Вып. 4. С. 3-7.

R. M. Shagaliyev, I. M. Belyakov, A. V. Alekseyev, A. A. Nuzhdin, O. E. Vlasova, V. V. Evdokimov, V. Yu. Rezhikov, S. V. Subbot. Methods for Parallelization of Multigroup Transport Problem Solution for 2D and 3D Geometry. // Book of Abstracts. PCFD, May 13-15, 2003, Moscow, Russia. P. 269.

Шагалиев Р. М. Адаптивный метод решения многомерного уравнения переноса с применением дробных сеток в фазовом пространстве // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2004. Вып. 8.

Бельков С. А., Беляков, И. М., Нуждина И. С., Винокуров. О. А., “Расчеты поля излучения в мишенях типа «ЛАБИРИНТ» для условий экспериментов на установке ИСКРА-5,” Труды 31 конференции по физике плазмы Европейского физического общества, Volume 28G, P2.004, Лондон, 28 июня-2 июля, 2004.