Методика решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных многоугольных сетках

А.Н.Москвин, В.А. Шумилин

Российский федеральный ядерный центр – ВНИИЭФ, проспект Мира, 37, Саров, Нижегородская область, Россия

Для решения двумерного уравнения переноса построена консервативная конечно-разностная схема на многоугольных пространственных сетках. Разностная схема строится в два этапа. На первом этапе промежуточные значения неизвестной функции в счетной ячейке находятся путем приближенного решения уравнения переноса вдоль характеристик. На втором этапе из уравнения баланса в ячейке находится корректирующий множитель, и все полученные значения неизвестной функции умножаются на этот множитель. Разработаны экономичные алгоритмы, реализующие метод бегущего счета на пространственных сетках, элементами которых являются произвольные многоугольники. Работоспособность методики иллюстрируется численными расчетами.

Введение

Построение разностных схем для решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных пространственных сетках представляет большой интерес. Это обусловлено тем, что использование таких сеток при решении задач со сложной геометрией позволяет выбирать пространственную сетку экономичным образом.

В работе Трощиева (1976) сформулирован некоторый подход к построению консервативных разностных аппроксимаций двумерного уравнения переноса на многоугольных пространственных сетках. Важным свойством этого подхода является треугольность получаемого разностного оператора переноса в случае, когда все счетные ячейки являются выпуклыми.

В работе Трощиева и Шумилина (1986) построена консервативная разностная схема для двумерного уравнения переноса на нерегулярных пространственных сетках, образованных выпуклыми четырехугольниками. При этом сеточные значения введены в центрах и на ребрах ячеек сетки. Для замыкания системы

сеточных уравнений применяются дополнительные соотношения, обеспечивающие либо первый, либо второй порядок аппроксимации в зависимости от числа освещенных сторон. Эта схема в течение ряда лет успешно применялась при решении широкого класса прикладных задач.

На основании результатов работ (Трощиев (1976), Трощиев и Шумилин (1986)) Шагалиевым и Плетеневой (1989) предложена схема с расширенным шаблоном, в которой сеточные значения искомой функции определены одновременно в узлах, на ребрах и в центрах ячеек сетки. На определенном таким образом шаблоне введены дополнительные соотношения по пространственным переменным, которые обеспечивают второй порядок аппроксимации при любом варианте освещенности сторон четырехугольной ячейки. Схема обобщена для случая произвольных выпуклых многоугольников.

В данной работе для решения двумерного уравнения переноса строится консервативная конечно-разностная схема на многоугольных пространственных сетках. Сеточные значения вводятся в центрах и на ребрах ячеек сетки, в узлах вводятся вспомогательные значения. Разностная схема строится в два этапа. На первом этапе промежуточные значения неизвестной функции в счетной ячейке находятся путем приближенного решения уравнения переноса вдоль характеристик. На втором этапе из уравнения баланса в ячейке находится корректирующий множитель, и все полученные значения неизвестной функции умножаются на этот множитель. Как и в работах (Трощиев и Шумилин (1986), Шагалиев и Плетенева (1989)) для выпуклых ячеек система сеточных уравнений является треугольной, что позволяет реализовать метод бегущего счета для любого направления освещенности. Для случая невыпуклых ячеек разработаны специальные алгоритмы, при этом обращено особое внимание на их экономичность. Работоспособность методики иллюстрируется численными расчетами.

Постановка задачи

Рассмотрим нестационарное двумерное кинетическое уравнение переноса нейтронов для осесимметричной геометрии в многогрупповом приближении. В цилиндрической системе координат при использовании записи в дивергентной форме это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial}{dt}\left(\frac{N_i}{\upsilon_{\mathrm{i}}}\right) + L\,N_i + \alpha\ N_i = F_i\,, \tag{1}$$

$$L\,N_i(z,r,\mu,\varphi) = \frac{\partial}{r\cdot\partial r}\left(r\cdot\sqrt{1-\mu^2}\cdot\cos\varphi\cdot N_i\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\cdot N) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r}\cdot\sin\varphi\cdot N_i\right),$$

$$F_i(z,r) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{i1}\beta_{i\,j}\cdot n_j^{(o)} + Q_i\right), \qquad n_j^{(o)} = \int_{-1}^{1} d\mu \int_{0}^{\pi} N_i\, d\varphi\,,$$

где: i – номер энергетической группы; ***r, z*** – цилиндрические координаты положения частицы; $\vec{\Omega}(\mu,\varphi)$ – единичный вектор в направлении полета частицы;

$\mu = \cos\theta$, φ – полярный и азимутальный углы ($-1 \le \mu \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi$); $\alpha_i(t,r,z)$, $\beta_{ij}(t,r,z)$ – коэффициенты поглощения и размножения частиц; $\upsilon_i(t,r,z)$ – скорость; $N_i(t,r,z,\mu,\varphi)$ – поток частиц, летящих в направлении $\vec{\Omega}$; $Q_i(t,r,z)$ – независимый источник частиц.

На внешней поверхности при $(\vec{\Omega}\cdot\vec{n}) < 0$ задается входящий поток частиц, где $\vec{n}$ – внешняя нормаль.

Система уравнений 1 решается итерациями по интегралу столкновений. В дальнейшем для простоты изложения рассматривается уравнение для одной группы с известной правой частью (индексы номера итерации и номеру группы опущены).

Аппроксимация по угловым переменным и по времени

Аппроксимация по угловым переменным и по времени строится аналогично работам (Трощиев и Шумилин (1986), Елесин и др. (1972)).

Производная по времени в выражении 1 аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{N}{\upsilon}\right) = \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^{n}}{\Delta t^{n+1}}, \tag{2}$$

где: $\Phi(t,r,z,\mu,\varphi) = \dfrac{N}{\upsilon}$, $\Delta t^{n+1} = t^{n+1} - t^{n}$.

Все величины, зависящие от ***r*** и ***z***, при аппроксимации по времени полагаем заданными на момент времени $t^{n+\gamma} = (1-\gamma)\cdot t^{n} + \gamma\cdot t^{n+1}$, $(0.5 \le \gamma \le 1)$.

Дополнительное соотношение по времени представляет собой равенство:

$$\frac{N^{n+\gamma}}{\upsilon} = \gamma\cdot\Phi^{n+1} + (1-\gamma)\cdot\Phi^{n} . \tag{3}$$

По переменной φ используется следующее дополнительное соотношение:

$$N_{m,\,q-1} = \eta\, N_{m,q} + (1-\eta)\, N_{m,q-1},\ (0.5 \le \eta \le 1). \tag{4}$$

С учетом выражений 2-4 уравнение 1 на интервалах $(\varphi_{q-1},\ \varphi_q)$, при заданном μ_m , аппроксимируется следующим разностным уравнением:

$$\frac{\partial}{r\cdot\partial r}\left(r\cdot\sqrt{1-\mu_m^2}\cdot\cos\bar{\varphi}_q\cdot N^{n+\gamma}_{m,q-\frac{1}{2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_m\cdot N^{n+\gamma}_{m,q-\frac{1}{2}}\right)-$$
$$-\frac{1}{r}\cdot\sqrt{1-\mu_m^2}\cdot\sin\varphi_q\cdot\frac{N^{n+\gamma}_{m,q}}{\Delta\varphi_q}+\frac{1}{r}\cdot\sqrt{1-\mu_m^2}\cdot\sin\varphi_{q-1}\cdot\frac{N^{n+\gamma}_{m,q-1}}{\Delta\varphi_q}+ \qquad (5)$$
$$+\left(\alpha+\frac{1}{\upsilon\gamma\Delta t}\right)\cdot\Delta V\cdot N^{n+\gamma}_{m,q-\frac{1}{2}} = \Delta V\left(F^{n+\gamma}+\frac{\Phi^n(r,z,\mu,\varphi)}{\gamma\Delta t}\right),$$
$$m=1,2,\dots,\hat{m},\quad q=1,2,\dots,\hat{q}_m\ ,$$

где: $\Delta\varphi_q=\varphi_{q-1}-\varphi_q$, $\cos\bar{\varphi}_q=\dfrac{1}{\varphi_q-\varphi_{q-1}}\cdot\displaystyle\int_{\varphi_{q-1}}^{\varphi_q}\cos\varphi\ d\varphi=\dfrac{\sin\varphi_q-\sin\varphi_{q-1}}{\varphi_q-\varphi_{q-1}}$.

Аппроксимация по пространственным переменным

Область пространства покрываем многоугольниками. Введем сеточные значения функции $N(t,r,z,\mu,\varphi)$ на ребрах – $N_{(к,\ к+1)}$ и в центрах многоугольников N_0. Для построения конечно-разностной схемы используем интегро-интерполяционный метод (Самарский (1977)) и метод дополнительных соотношений (Трощиев и Шумилин (1986), Елесин и др. (1972)).

Умножим уравнение 5 на элемент фазового объема $r\,dr\,dz\,d\varphi$ и проинтегрируем по счетной ячейке, представляющей собой прямую призму, в основании которой лежит многоугольная ячейка (смотри рисунок 1).

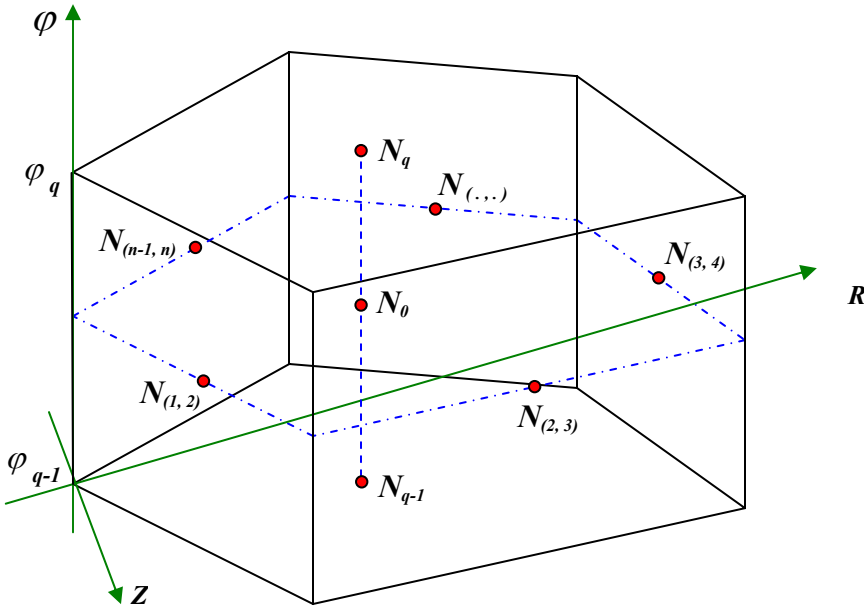


Рисунок 1. Пример счетной ячейки с сеточными значениями функции $N(t,r,z,\mu,\varphi)$.

Переходя по формулам Гаусса-Остроградского к интегрированию по граням и применяя теорему о среднем, получаем:

$$\sum_{k=1}^{\tilde{k}} \chi_k \cdot N_{(k,k+1)} + N_q \cdot \chi_q - N_{q-1} \cdot \chi_{q-1} + \left(\alpha + \frac{1}{\upsilon \gamma \Delta t}\right) \cdot \Delta \mathrm{V} \cdot N_0 = \Delta \mathrm{V} \cdot \left(F + \frac{N^n}{\upsilon \gamma \Delta t}\right). \quad (6)$$

Здесь: $\tilde{k}$ - число сторон у многоугольника, $N_{(k,k+1)}$ ($N_{(\tilde{k},\tilde{k}+1)} \equiv N_{(\tilde{k},1)}$) – значения функции $N(t,r,z,\mu,\varphi)$ на боковых гранях призмы; N_q и N_{q-1} – значения функции $N(t,r,z,\mu,\varphi)$ на нижнем и верхнем основаниях призмы; N_0 – значение функции $N(t,r,z,\mu,\varphi)$ в центре;

$$\chi'_k = \mu_m \left(r_{k+1} - r_k\right) - \sqrt{1-\mu_m^2} \cos\varphi_q \left(z_{k+1} - z_k\right),$$

$$\chi_k = \frac{r_k + r_{k+1}}{2} \cdot \chi'_k, \quad r_{\tilde{k}+1} \equiv r_1, \; z_{\tilde{k}+1} \equiv z_1 \qquad (7)$$

$$\chi_{q-1} = \frac{\sqrt{1-\mu_m^2} \cdot \sin\varphi_{q-1} \cdot dS}{\varphi_{q-1} - \varphi_q} \quad \chi_q = \frac{\sqrt{1-\mu_m^2} \cdot \sin\varphi_q \cdot dS}{\varphi_{q-1} - \varphi_q}$$

где: $dS = \iint dz\,dr$ - площадь счетной ячейки в плоскости RZ; $\Delta \mathrm{V} = \iint r\,dz\,dr$ - элемент объема ячейки.

Важным этапом конструирования схем на многоугольных сетках является построение дополнительных соотношений по пространственным переменным. Необходимо, чтобы при любых направлениях μ_m и $\varphi_{q,m}$, то есть при любых вариантах освещенности, они приводили к невырожденной системе сеточных уравнений, и при этом на гладких решениях имелась возможность аппроксимации соответствующих алгебраических тождеств со вторым или близким ко второму порядком точности.

Разностная схема строится в два этапа. На первом этапе промежуточные значения неизвестной функции на «неосвещенном» контуре многоугольника и в его центре находятся путем приближенного решения уравнения переноса вдоль характеристик. На втором этапе из уравнения баланса нейтронов 6 в ячейке находится корректирующий множитель, и все полученные в ячейке значения функции умножаются на этот множитель.

Поясним это на примере. На рисунке 2 приведен пример выпуклой многоугольной ячейки.

Для указанного направления $\vec{\Omega}$ известными, по пространственным переменным, являются значения функции $N_{(i,i+1)}$ на соответствующих сторонах $i = \overline{1, j-1}$.

Требуется найти:

- значения функции N_0 в центре ячейки;
- значения функции $N_{(i,i+1)}$ на сторонах $i = \overline{j, n}$.

Для замыкания системы уравнений в данной ячейке для данного направления необходимо использовать (n-(j-1))+1 дополнительных соотношений по пространству.

Решение в центре ячейки мы будем определять как среднеарифметическое значение функции N на всех боковых сторонах:

$$N_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} N_{(i,i+1)}, \text{ n – число сторон в многоугольнике.} \qquad (8)$$

Оставшиеся (n-(j-1)) дополнительных соотношений мы получим с учетом следующих соглашений. Решение вдоль характеристик для искомой функции в центрах «неосвещенных»[1] сторон может быть записано в виде:

$$N_{(k,k+1)} = \left(1 + d \cdot \ell_{(k,k+1)}\right) N^{P}{}_{(k,k+1)} \qquad \left(j \le k \le n\right), \qquad (9)$$

где:

d - линейный коэффициент размножения (поглощения) нейтронов вдоль характеристики; $\ell_{(k,k+1)}$ - расстояние от центра «неосвещенной» стороны (k,k+1) до ее проекции на освещенный контур многоугольника; $N^{P}{}_{(k,k+1)}$ - значение проекции функции на «освещенный»[2] контур многоугольника, которое может быть получено путем линейной интерполяции соответствующих узловых значений стороны, куда «падает» проекция. Для этого на «освещенном» контуре многоугольника введем в наш шаблон значения функции $N\left(t,r,z,\mu,\varphi\right)$ в узлах ячейки.

Графически построение проекций можно представить в виде изображения, приведенного на рисунке 3.

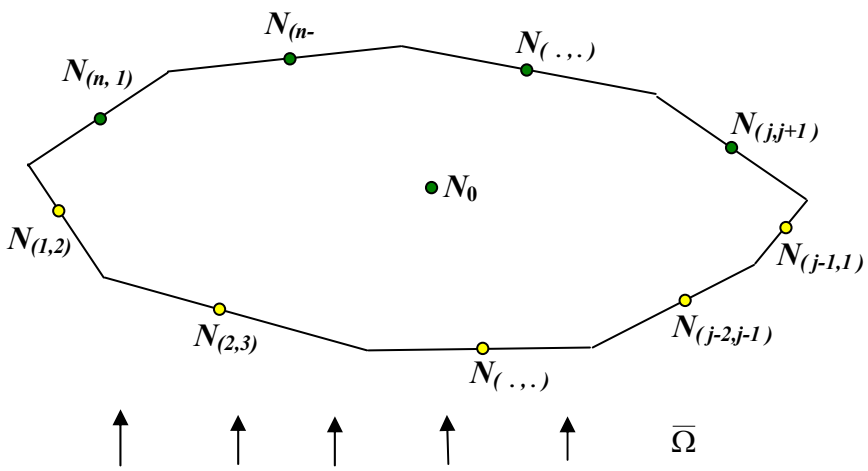


Рисунок 2. Пример выпуклого n-угольника.

[1] Стороны, для которых выполнено условие: $\chi_k > 0$

[2] Стороны, для которых выполнено условие: $\chi_k < 0$

«Освещенная» сторона, куда «падает» проекция из центра «неосвещенной» стороны, экономичным образом может быть определена с учетом коэффициентов χ' (из выражения 7).

Относительно вычисления параметра $\ell_{(k,k+1)}$ можно заметить следующее. Вместо реальной длины, которая может быть вычислена, например, с привлечением функции корня квадратного, можно использовать прирост по одной из координат осей. Адекватность такой замены вытекает из подобия треугольников.

Таким образом, отметим, что приведенные выше замечания существенным образом уменьшают трудоемкость представляемой схемы.

Подставляя выражения 8 и 9 в 6, для рассматриваемой нами ячейки получаем формулу для определения параметра d :

$$d \cdot \left\{ \sum_{\chi>0} \ell_{(k,k+1)} \cdot N^{P}{}_{(k,k+1)} \cdot \chi_k + \frac{1}{n}\left(\sum_{\chi>0} \ell_{(k,k+1)} \cdot N^{P}{}_{(k,k+1)} \right) \cdot \left(\frac{\chi_q}{\eta} + \left(\alpha + \frac{1}{\upsilon\,\gamma\,\Delta t} \right) \cdot \Delta \mathrm{V} \right) \right\} =$$

$$= \Delta \mathrm{V} \cdot \left(F + \frac{N^n}{\upsilon\,\gamma\,\Delta t} \right) - \sum_{\chi<0} N_{(k,k+1)} \cdot \chi_k - \sum_{\chi>0} N^{P}{}_{(k,k+1)} \cdot \chi_k - \left(\frac{\chi_q}{\eta} + \left(\alpha + \frac{1}{\upsilon\,\gamma\,\Delta t} \right) \cdot \Delta \mathrm{V} \right) \cdot \qquad (10)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{\chi<0} N_{(k,k+1)} + \frac{1}{n} \sum_{\chi>0} N^{P}{}_{(k,k+1)} \right) - N_{q-1} \left(\frac{\chi_q \cdot (1-\eta)}{\eta} - \chi_{q-1} \right)$$

где: $\sum_{\chi>0}$ – суммирование по «неосвещенным» сторонам; $\sum_{\chi<0}$ – суммирование по «освещенным» сторонам; n - число сторон в многоугольнике.

Вычислив таким образом значение параметра d, по формуле 9 находим все искомые значения функции в центрах «темных» сторон, и далее, по формуле 8 – значение функции в центре многоугольной ячейки.

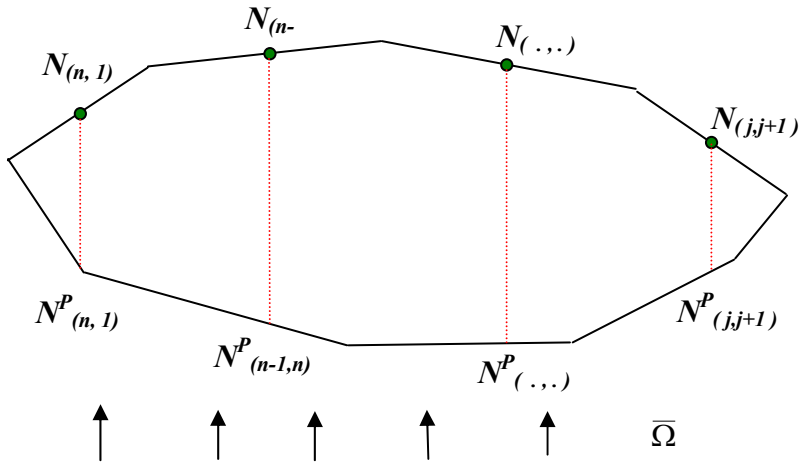


Рисунок 3. Пример построения проекций для средин «неосвещенных» сторон.

Особое внимание уделено вопросам построения экономичных алгоритмов преобразования матрицы системы алгебраических уравнений, получающихся в результате замены на многоугольниках дифференциального уравнения разностным, в треугольный вид (так называемые, алгоритмы упорядочивания многоугольников в области).

Трощиевым (1976) доказана возможность упорядочивания для варианта с выпуклыми многоугольниками. В общем случае элементами рассматриваемой авторами пространственной сетки могут являться, как выпуклые, так и невыпуклые многоугольники.

Пусть в области содержится несколько невыпуклых многоугольников. Выделим локальные подобласти, которые состоят из невыпуклого многоугольника и соседних с ним многоугольников. Если в таких подобластях, например, воспользовавшись геометрическими перестроениями избавится от невыпуклых многоугольников, то мы можем привести рассматриваемую систему в условия теоремы, доказанной в работе Трощиева (1976) (смотри рисунок 4).

Следовательно, если для каждой из определенных таким образом подобластей с невыпуклыми многоугольниками (смотри, например, рисунок 5) предложить специальные алгоритмы упорядочивания, то поставленную задачу можно решить в целом.

Теперь обратимся к вопросам экономичности алгоритмов упорядочивания.

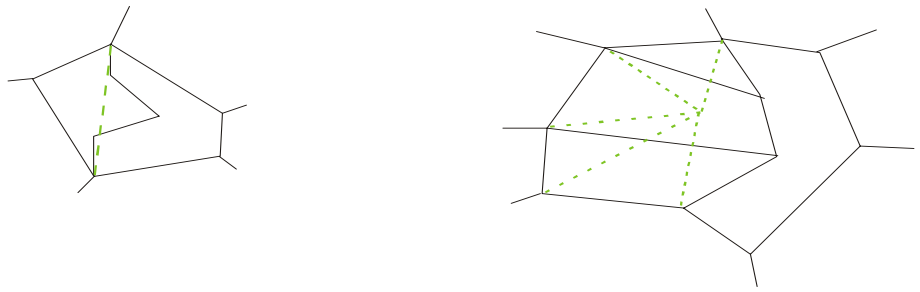


Рисунок 4. Пример алгоритмов «ухода» от невыпуклых многоугольников.

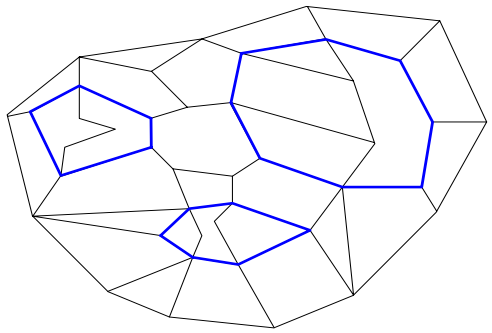


Рисунок 5. Пример выделения локальных подобластей, содержащих невыпуклые ячейки.

Напомним, что для выбранного направления полета частиц уравнение переноса можно численно решать в тех многоугольниках, которые на текущий момент имеют на всех «освещенных» сторонах известные значения функции $N(t,r,z,\mu,\varphi)$. Нетрудно заметить, что процедура поиска разрешимых многоугольников может приводить к значительным временным затратам.

Для нерегулярных сеток разработан специальный алгоритм упорядочивания многоугольников. Информация о ячейках, у которых освещена хотя бы одна сторона, заносится в стек, а по мере их разрешения информация удаляется из стека. Проверка на разрешимость конкретной ячейки сводится к проверке на равенство нулю одного параметра. Предложенный алгоритм упорядочивания является весьма экономичным и практически не сказывается на общих трудозатратах.

Примеры расчетов

Задача 1. Рассматривается цилиндр с параметрами $0 \le r \le 1$, $0 \le z \le 2$, $\alpha = 1.34$, $\beta = 2.25$, $\rho = 1$, $Q = 0$. Требуется определить собственный параметр λ – постоянную изменения нейтронов по времени (Трощиев и Шумилин (1986)).

Для расчета данной задачи выбирались пространственные сетки двух типов: прямоугольная и пространственная сетка, состоящая из правильных шестиугольников.

Расчеты проводились на измельчающихся пространственных сетках. Угловые сетки для расчета данной задачи варьировались. Расчеты проводились при числе интервалов по переменной μ равном: 6 (т.е. 24 направления полета частиц), 12 (84 направления полета частиц), 24 (312 направлений полета частиц), 48 (1200 направлений полета частиц).

В таблицах 1-2 приведены значения параметра λ в зависимости от угловых и пространственных четырехугольных сеток.

За точное значение λ_T для заданного числа интервалов по переменной μ примем значения, полученные для расчета на прямоугольной сетке:

$\lambda_T = \lambda_n + ah^2$, где h - линейный размер счетной ячейки.

Имеем $\lambda_T^6 = 0.164755$, $\lambda_T^{12} = 0.152714$, $\lambda_T^{24} = 0.148885$, $\lambda_T^{48} = 0.147787$.

В таблице 3 приведены погрешности $\lambda_T - \lambda$ для всех расчетов.

Таблица 1. Значение параметра λ на прямоугольных пространственных сетках.

Сетка	Число интервалов по μ	Размер ячеек по r			
		h=0.1(см)	h/2	h/4	h/8
Прямоуг.	6	0.162753	0.164256	0.164631	0.164724
	12	0.150734	0.15222	0.15259	0.152683
	24	0.146903	0.148393	0.148762	0.148854
	48	0.145817	0.147295	0.147664	0.147756

Таблица 2. Значение параметра λ на шестиугольных пространственных сетках.

Сетка	Число интервалов по μ	Размер ячеек по r (см)			
		ℓ=0.1	ℓ=0.07	ℓ=0.035	ℓ=0.0175
Шестиугол.	6	0.16219	0.16407	0.16464	0.164835
	12	0.150546	0.152302	0.152821	0.15292
	24	0.146242	0.147957	0.148874	0.149012
	48	0.14480	0.145054	0.146106	0.147558

Таблица 3. Полученные погрешности в расчетах.

Сетка	Число интервалов по μ	Погрешности			
		$\lambda_T-\lambda_h$	$\lambda_T-\lambda_{h/2}$	$\lambda_T-\lambda_{h/4}$	$\lambda_T-\lambda_{h/8}$
Прямоуг.	6	0.002007	0.000504	0.000129	3.6E-05
	12	0.001976	0.00049	0.00012	2.7E-05
	24	0.001987	0.000497	0.000128	3.6E-05
	48	0.001973	0.000495	0.000126	3.4E-05
		$\lambda_T-\lambda_{l=0.1}$	$\lambda_T-\lambda_{l=0.07}$	$\lambda_T-\lambda_{l=0.035}$	$\lambda_T-\lambda_{l=0.0175}$
Шестиугол.	6	0.00257	0.00069	0.00012	-7.5E-05
	12	0.002164	0.000408	-0.00011	-0.00021
	24	0.002648	0.000933	1.6E-05	-0.00012
	48	0.00299	0.002736	0.001684	0.000232

Как видно из таблицы 3, в расчете на прямоугольных сетках имеет место сходимость по пространственным сеткам с порядком не ниже второго. Расчеты на шестиугольных сетках по точности близки к расчетам на прямоугольных сетках.

На рисунке 6 графически представлена зависимость параметра λ в расчетах от угловых и пространственных переменных.

Задача 2. Эта задача – расчет параметра $k_{эфф}$ в четырехгрупповом приближении (Buckel et al. (1977)).

Рассматривается горизонтальный разрез верхней половины трехмерного реактора SNR-300 (смотри рисунок 7). Материалы: 1,2 - делящиеся, 3 - отражатель, 5,6 - регулирующие стержни.

Для расчета данной задачи выбирались пять пространственных сеток (смотри рисунок 8).

Во всех расчетах взято 6 интервалов по μ (24 направления полета нейтронов). В таблице 4 представлены результаты расчетов.

Как видно из результатов, приведенных в таблице 4, в расчетах наблюдается сходимость по пространственным переменным (пространственная сетка в расчетах является нерегулярной). Результаты расчетов по программе хорошо согласуются с результатами, приведенными в работе (Buckel et al. (1977)).

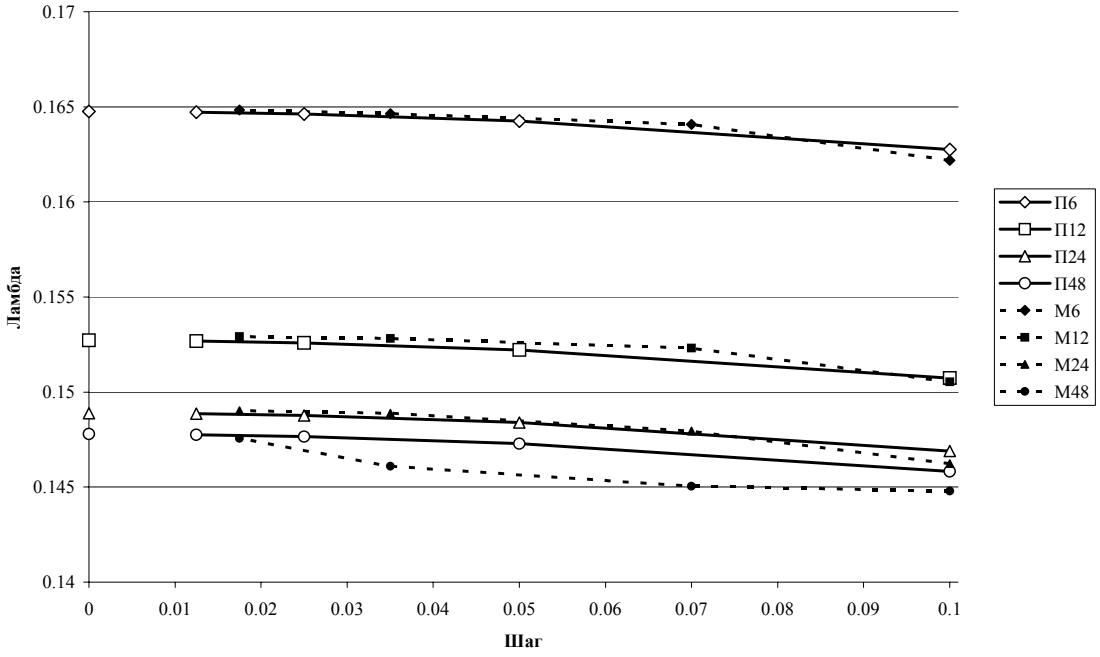


Рисунок 6. Зависимость параметра λ в расчетах от угловых и пространственных переменных.

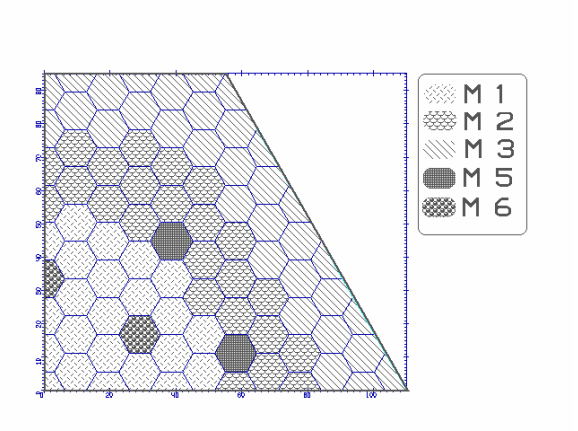
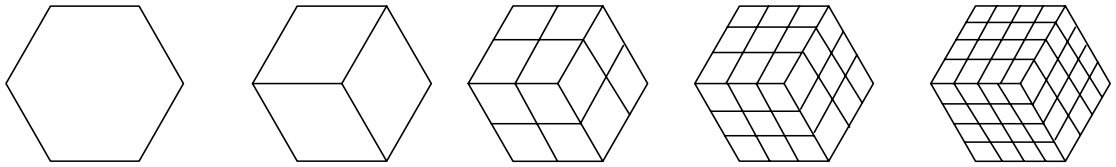


Рисунок 7. Геометрия задачи 2.



а) шестиугольная сетка б) сетка L_3 в) сетка L_{12} г) сетка L_{27} д) сетка L_{48}

Рисунок 8. **Элементы пространственных сеток задачи 2.**

Таблица 4. Значения параметра $k_{эфф}$.

Сетка	**$k_{эфф}$**
Шестиугольная	1.13035
L3	1.13171
L12	1.13337
L27	1.13362
L48	1.13368

Заключение

Практический опыт подтвердил эффективность применения методики решения уравнения переноса на многоугольных пространственных сетках. Особенно это проявляется в решении задач со сложной геометрией, имеющих локальные мелкомасштабные подобласти, в которых применение многоугольных ячеек позволяет строить сетку экономичным образом.

Благодарности

Первый вариант методики был создан в 1995 году в рамках проекта МНТЦ №67.

Список использованных источников

Трощиев, В.Е., “О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором,” Журнал вычислительной математики и математической физики. т.16, №3, 793–797 (1976).

Трощиев, В.Е., Шумилин, В.А., “Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках,” Журнал вычислительной математики и математической физики. т. 26, №2, 230–241 (1986).

Шагалиев, Р.М., Плетенева, Н.П., “Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном,” Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. Вып. 3, 34–41 (1989).

Елесин, В.А., Трощиев, В.Е., Федянин В.Н., Юдинцев В.Ф., “Численная методика и организация программы для решения многогруппового нестационарного кинетического уравнения,” Комплексы программ математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 18–23 (1972).

Самарский, А.А., “Теория разностных схем,” М.: Наука (1977).

Buckel, G., Kufner, K., Stehle, B., “Benshmark Calculation for a Soolium-Cooled Breeder Reactor by Two- and Three- Dimensional Diffusion Methods,” - Nucl, Sci. and Eng., 64, 75–89 (1977).