Доклад

А.Д.Гаджиев, В.Н.Селезнев, А.А.Шестаков

“ **DS_n-метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели** ”

на конференцию пяти ядерных центров России и США

(Австрия, Вена, июнь 2005 г., 5-2042 от 3.08.04)

Введение

Рассматривается численный алгоритм для решения двумерных уравнений переноса теплового излучения в многогрупповом кинетическом приближении. Алгоритм строится на основе DDAD-схемы. DDAD-схема представляет собой модификацию DS_n-метода, которая повышает его эффективность в оптически плотных средах, сохраняя второй порядок точности по пространственным координатам [1]. Для ускорения итераций по нелинейности уравнений переноса реализован метод выделения диагональной матрицы (ВДМ-метод).

В докладе дается описание численной методики DDAD и рассмотрены результаты численного расчета модельных задач.

1. Численная методика DDAD

Рассмотрим двумерное нестационарное уравнение переноса излучения с осевой симметрией в многогрупповом приближении:

$$\frac{1}{c}\frac{dJ_g}{dt}+div\left(\vec{\Omega}J_g\right)+\alpha_g J_g=\frac{\alpha_{sg}}{4\pi}\int_{\vec{\Omega}}J_g d\vec{\Omega}+\frac{\alpha_{cg}}{4\pi}B_g(T),\ \ g=1,2,...,G, \qquad (1.1)$$

где t - время, c - скорость света, ρ - плотность вещества, T – температура вещества,

$\vec{\Omega}$ – единичный вектор в направлении движения фотонов,

g - индекс группы, $g=1,2,...,G$, ε_g - энергия фотонов группы g,

$J_g(t,r,z,\mu,\phi)=\int_{\Delta\varepsilon_g}J(t,r,z,\mu,\phi,\varepsilon)d\varepsilon$ - интенсивность излучения фотонов группы g,

летящих в направлении $\vec{\Omega}$,

$\alpha_g(t,\vec{r})$ - коэффициент ослабления фотонов группы g,

$\alpha_{cg}(t,\vec{r})$ - коэффициент поглощения фотонов группы g,

$\alpha_{sg}(t,\vec{r})$ - коэффициент рассеяния фотонов группы g,

$B_g=\frac{8\pi}{c^2h^3}\int_{\Delta\varepsilon_g}\frac{\varepsilon^3}{\exp\frac{\varepsilon}{T}-1}d\varepsilon$ - функция Планка для группы g, h - постоянная Планка.

Совместно с уравнениями переноса излучения (1.1) решается уравнение энергии:

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}=\sum_{g=1}^{G}\alpha_{cg}\int_{\vec{\Omega}}(J_g-\frac{1}{4\pi}B_g)d\vec{\Omega}+\rho Q, \qquad (1.2)$$

где Q - внешний источник.

При построении численного алгоритма будем исходить из уравнения переноса, записанного в цилиндрических координатах (r,z). Для кинетических уравнений координатная форма оператора $div(\vec{\Omega}J)$ имеет вид:

$$div\left(\vec{\Omega}J\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\xi J\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu J\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\eta J\right), \qquad (1.3)$$

где $\mu=\cos\theta,\xi=\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi,\eta=\sqrt{1-\mu^2}\sin\phi,$

θ - угол между $\vec{\Omega}$ и осью $\vec{z}$, ϕ - угол между $\vec{r}$ и проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную оси $\vec{z}$.

В качестве пространственной сетки применяется произвольная четырехугольная сетка, задаваемая координатами узлов $(r,z)_{ij}$. По угловым переменным μ, ϕ используется ES_n-квадратура [2].

Произведя интегрирование уравнения (1.1) на ячейке сетки, получим:

$$\frac{1}{c\Delta t^n}\left[\left(J_g\right)^{n+1}-\left(J_g\right)^n\right]+div_h(\vec{\Omega}J_g^{n+1})+\alpha_g J_g^{n+1}=Q_g^{n+1}, \qquad (1.4)$$

$$Q_g^{n+1}=\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_{sg}U_g^{n+1}+\alpha_{cg}B_g^{n+1}\right),$$

$$U_g=\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K_m}J_g\Delta\mu_{m-1}\Delta\phi_{k-1},\ g=1,2,...,G_1.$$

Разностный оператор $div_h(\cdot)$ имеет следующий смысл:

$$div_h(\vec{\Omega}J_g)\equiv\frac{1}{\Delta V_{ij}}\left[\Delta_i(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lrJ_g)+\Delta_j(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lrJ_g)\right]-\frac{\Delta S_{ij}}{\Delta V_{ij}}\frac{\Delta_k(\eta J_g)}{\Delta\phi_k},$$

$$(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta l)_i=+\xi\Delta z_i-\mu\Delta r_i=+\xi(z_{i,j+1}-z_{ij})-\mu(r_{ij+1}-r_{ij}),$$

$$(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta l)_j=-\xi\Delta z_j+\mu\Delta r_j=-\xi(z_{i+1,j}-z_{ij})+\mu(r_{i+1,j}-r_{ij}),$$

где индексы (i,j) пробегают значения по всем ячейкам; $k=1,2,...,K_m$; $m=1,2,...,M$.

Для замыкания система уравнений DS_n-метода (1.4) дополняется краевыми условиями и соотношениями, связывающими значения J в центре и на гранях ячеек. Эти соотношения выбираются в соответствии с направлением потока на ребрах.

Задача переноса излучения характеризуется тем, что оптические плотности среды меняются в очень широком диапазоне, как по пространству, так и с течением времени. Значительные оптические плотности создают большие проблемы для метода дискретных ординат, вызывая немонотонности в решении. Это связано с наличием членов антидиссипативного характера в остаточном члене для схемы второго порядка точности (DD-схемы).

Для улучшения монотонных свойств DS_n-метода по пространственным переменным введем искусственную диссипацию:

$$\frac{1}{c\Delta t}\left[\left(J_g\right)^{n+1}-\left(J_g\right)^n\right]+div_h(\vec{\Omega}\Psi_g)+\alpha_g J_g=Q_g, \qquad (1.5)$$

где диссипативная функция распределения Ψ_g связана с функцией J_g по формуле

$$J_g=\Psi_g+\delta_g hdiv_h(\vec{\Omega}\Psi_g)-\theta_g hdiv_h\left(\vec{\Omega}\tilde{Q}_g\right), \qquad (1.6)$$

где h - линейный размер ячейки, δ_g,θ_g-коэффициенты диссипации, $\tilde{Q}_g=Q_g+\frac{1}{c\Delta t}\left(J_g\right)^n$.

Если подставить выражение Ψ через J в уравнение (1.5), то получим уравнение переноса с искусственной диссипацией с дополнительными слагаемыми со вторыми производными.

$$\frac{1}{c\Delta t}\left[\left(J_g\right)^{n+1}-\left(J_g\right)^{n}\right]+div_h(\vec{\Omega}J_g)+\alpha_g J_g=Q_g+\delta_g h\, div_h(\vec{\Omega}J_g)-\theta_g h div_h\left(\vec{\Omega}\tilde{Q}_g\right)+o(h^2).$$

Путем подбора коэффициентов δ_g,θ_g мы стремимся подавить антидиссипацию, которая возникает в DD-схеме.

Заменяя J по формуле (1.6) в (1.5), получим уравнение относительно функции Ψ:

$$\tilde{\alpha}_g\Psi_g+\left(1+\delta_g h\tilde{\alpha}_g\right)div_h(\vec{\Omega}\Psi_g)=\tilde{\alpha}_g\left[\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}+\tilde{\alpha}_g\theta_g\Delta h div_h\left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right)\right], \qquad (1.7)$$

где $\tilde{\alpha}_g=\frac{1}{c\Delta t}+\alpha_g$. Здесь параметр $\tilde{\alpha}_g$ внесен под знак $div_h\left(\vec{\Omega}\tilde{Q}_g\right)$, предполагая его постоянство в рассматриваемой ячейке.

При итерационном решении уравнения переноса значение Q_g в (1.7) берется с предыдущей внешней итерации, т.е. Q_g^ν. Поскольку наша система уравнений является интегро-дифференциальной, то будем применять метод итераций по правой части уравнения переноса, включающей интеграл столкновений и независимый источник в виде функции Планка:

$$Q_g^\nu=\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_{sg}^\nu U_g^\nu+\alpha_{cg}^\nu B_g\left(T^\nu\right)\right), \qquad (1.8)$$

$$div_h(\vec{\Omega}Q_g^\nu)\equiv\frac{1}{\Delta V_{ij}}\left[\Delta_i(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lrQ_g^\nu)+\Delta_j(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lrQ_g^\nu)\right]-\frac{\Delta S_{ij}}{\Delta V_{ij}}\frac{\Delta_k(\eta Q_g^\nu)}{\Delta\phi_k}.$$

Здесь значения Q_g^ν на гранях ячейки определяются как полусуммы значений в центрах соседних ячеек.

Вводя приведенный коэффициент поглощения $\alpha_g^*=\frac{\tilde{\alpha}_g}{1+\delta_g h\tilde{\alpha}_g}$, запишем уравнение (1.7) в виде

$$\alpha_g^*\Psi_g+div_h(\vec{\Omega}\Psi_g)=\alpha_g^*Q_g^*, \qquad (1.9)$$

где $Q_g^*=\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}+\tilde{\alpha}_g\theta_g h div_h\left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right)$.

Теперь параметры δ_g,θ_g будем выбирать из условия малости $J_g-\Psi_g=O\left(\Delta x^2\right)$ и монотонных свойств решения уравнения (1.9) в оптически плотной среде. Для решения уравнения (1.9) применим метод дискретных ординат второго порядка точности (DD-схему).

Полученную схему можно представить в сеточно-характеристическом виде [3]:

$$\alpha_g^*\frac{\left(\Psi_g\right)_{s+1}+\left(\Psi_g\right)_s}{2}+\frac{\left(\Psi_g\right)_{s+1}-\left(\Psi_g\right)_s}{\Delta x_s}=\alpha_g^*Q_g^*, \qquad (1.10)$$

$$div_h(\vec{\Omega}\Psi_g)=\frac{\left(\Psi_g\right)_{s+1}-\left(\Psi_g\right)_s}{\Delta x_s}.$$

Здесь Ψ_s – значение функции Ψ в точке пересечения характеристикой гиперплоскости, проходящей через центры освещенных граней; Ψ_{s+1} – значение функции Ψ в точке пересечения характеристикой гиперплоскости, проходящей через центры неосвещенных граней; $\Delta x_s=x_{s+1}-x_s$ - расстояние между этими двумя точками вдоль характеристики. В

зависимости от того, сколько граней освещено, а сколько нет, получаются формулы для $\Psi_s, \Psi_{s+1}, \Delta x_s$:

$$\Psi_s = \left[-\sum_l \left(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lr\Psi\right)_l + \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_k\Psi_k \right]\left[-\sum_l \left(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lr\right)_l + \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_k \right]^{-1},$$

$l -$ индекс освещенного ребра;

$$\Psi_{s+1} = \left[\sum_{\text{€}} \left(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lr\Psi\right)_{\text{€}} + \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_{k+1}\Psi_{k+1} \right]\left[\sum_{\text{€}} \left(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lr\right)_{\text{€}} + \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_{k+1} \right]^{-1},$$

€ – индекс неосвещенного ребра; (1.11)

$$\Delta x_s = \Delta V_{ij}\left[\sum_{\text{€}} \left(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lr\right)_{\text{€}} + \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_{k+1} \right]^{-1} = \Delta V_{ij}\left[-\sum_l \left(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta lr\right)_l + \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_k \right]^{-1}.$$

Теперь выберем параметры δ_g, θ_g таким образом, чтобы решения уравнений (1.10) совпали с точным решением исходного уравнения переноса в характеристической форме на интервале $[x_s \le x \le x_{s+1}]$:

$$\frac{\partial J_g}{\partial x} + \tilde{\alpha}_g J_g = \tilde{Q}_g. \tag{1.12}$$

При этом предполагаем постоянство $\tilde{\alpha}_g$ в ячейке на интервале $[x_s, x_{s+1}]$ и линейность $\tilde{Q}_g$:

$$\tilde{Q}_g(x) = \frac{\left(\tilde{Q}_g\right)_s + \left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1}}{2} + \frac{x - x_{s+1/2}}{\Delta x_s}\left[\left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1} - \left(\tilde{Q}_g\right)_s\right].$$

Тогда получим

$$\left(J_g\right)_{s+1} = \exp\left(-\tilde{\alpha}_g\Delta x_s\right)\left(J_g\right)_s + \left(1 - \exp\left(-\tilde{\alpha}_g\Delta x_s\right)\right)\frac{\left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1} - \left(\tilde{Q}_g\right)_s}{-\tilde{\alpha}_g^{\,2}\Delta x_s} + \frac{1}{\tilde{\alpha}_g}\left(\left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1} - \left(\tilde{Q}_g\right)_s \exp\left(-\tilde{\alpha}_g\Delta x_s\right)\right).$$

Теперь, предполагая равенство значений $\left(\Psi_g\right)_s = \left(J_g\right)_s$ на освещенных гранях, потребуем совпадения выходящих значений $\left(\Psi_g\right)_{s+1} = \left(J_g\right)_{s+1}$. Выбирая параметр δ_g из этого требования, получим формулу

$$\delta_g = \frac{1}{2}\frac{1 + \exp\left(-\tilde{\alpha}_g\Delta x_s\right)}{1 - \exp\left(-\tilde{\alpha}_g\Delta x_s\right)} - \frac{1}{\tilde{\alpha}_g\Delta x_s},\ \ \theta_g = \frac{1}{\tilde{\alpha}_g}\delta_g,\ h = \Delta x_s. \tag{1.13}$$

После этого разность $J_g - \Psi_g$ принимает форму

$$J_g - \Psi_g = -\frac{\delta_g\Delta x}{\alpha_g^*} div_h\left(\vec{\Omega} div_h\left(\vec{\Omega}\Psi_g\right)\right) + \left(\delta_g\Delta x\right)^2 div_h\vec{\Omega}\left(div_h\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right). \tag{1.14}$$

Теперь оценим величину $J_g - \Psi_g$ с учетом соотношений $0 \le \delta_g \le 0.5,\ \ 0 \le \alpha_g^*\Delta x \le 2$. При $\tilde{\alpha}_g\Delta x < 1$, используя разложение $\exp\left(-\tilde{\alpha}_g\Delta x\right)$ в ряд Тейлора, получим оценку $\frac{\delta_g\Delta x}{\alpha_g^*} = \frac{\delta_g\Delta x}{\tilde{\alpha}_g}\left(1 + \delta_g\Delta x\tilde{\alpha}_g\right) = \frac{\Delta x^2}{12} + O\left(\Delta x^3\right)$. Если же $\tilde{\alpha}_g\Delta x \ge 1$, то $\frac{\delta_g\Delta x}{\alpha_g^*} = \frac{\delta_g\Delta x}{\tilde{\alpha}_g} + \left(\delta_g\Delta x\right)^2 \le 2\delta_g\Delta x^2 < \Delta x^2$. Используя это, мы получим оценку $J_g - \Psi_g = O\left(\Delta x^2\right)$.

В итоге мы имеем следующее. Вместо уравнения (1.4), где оптическая плотность $\tilde{\alpha}_g\Delta x$ может быть большой и использование DD-схемы приводит к значительным

нефизичным осцилляциям, мы решаем задачу (1.9) относительно диссипативной функции Ψ_g. Для новой задачи оптическая толщина мала $\alpha_g^* \Delta x < 2$ и применение DD-схемы для ее решения не приводит к тем нефизичным осцилляциям, о которых говорилось выше. Решение новой задачи остается близкой к решению исходной задачи: $J_g - \Psi_g = O\left(\Delta x^2\right)$.

С выбранными параметрами (1.13) мы будем решать уравнение переноса (1.7) на основе DD-схемы. Счет ведется по схеме рекуррентного бегущего счета с использования процедуры упорядочивания [4]. Если в какой либо ячейке для какого-либо направления получим $\Psi_g < 0$, то в данной ячейке осуществляется переход на схему первого порядка точности ($\delta_g = 0.5,\ \theta_g = 0$), т.е. счет ведется по DD/St-схеме.

После того как будут найдены Ψ_g, находим значение интенсивности излучения в центре ячейки:

$$\left(J_g^{\nu+1/2}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tilde{\alpha}_g \Delta V_{ij}} \left\{ (Q_g^{\nu} + \frac{J_g^n}{c\Delta t})\Delta V_{ij} - \left[\Delta_i(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta l r \Psi_g^{\nu+1/2}) + \Delta_j(\vec{\Omega}\vec{n}\Delta l r \Psi_g^{\nu+1/2})\right] - \right.$$
$$\left. - \Delta S_{ij} \frac{\Delta_k(\eta \Psi_g^{\nu+1/2})}{\Delta \phi_k} \right\}. \qquad (1.15)$$

Потом переходим к следующей по порядку ячейке. И так до тех пор, пока не переберем для данного направления $\vec{\Omega}_{k-1/2,m-1/2}$ все ячейки. Затем выполняется цикл по направлениям $\vec{\Omega}$, пока не рассчитаем все направления для данной группы. После этого переходим к следующей группе g, пока не завершим цикл для всех групп. По их завершению, переходим ко второму (ускоряющему) этапу.

Метод простых итераций источника для задач переноса излучения обычно сходится медленно, особенно при наличии оптически плотных слоев. Поэтому ускорение итераций является очень важным фактором обеспечения экономичности расчётов.

В методике DDAD для ускорения итераций реализован метод выделения диагональной матрицы (ВДМ-метод). Этот подход ранее использовался в работах [5],[6]. Он проще диффузионно-синтетического метода (DSA-метод [7]) и в то же время дает значительное ускорение простых итераций, естественно, уступая в скорости сходимости DSA-методу. ВДМ-метод был адаптирован к DDAD-схеме на сетках из произвольных четырехугольников [1].

Если в системе уравнений переноса, аналогично итерациям типа Якоби, выразить плотность излучения через функцию Планка в той же точке и подставить это в уравнение энергии, то мы получим систему уравнений с диагональной матрицей относительно температуры. Используя полученную температуру, исходную систему можно решить либо прогонкой в одномерном случае, либо итерационными методами в двумерном случае.

Рассмотрим уравнение энергии, решаемое совместно с уравнением переноса излучения:

$$\rho \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t^n} = \sum_{g=1}^{G} \alpha_{cg} (U_g^{n+1} - B_g^{n+1}) + \rho Q,$$

где $B_g^{n+1} = B_g\left(T^{n+1}\right)$.

Уравнение энергии для $\nu+1$ итерации:

$$\rho(E^{\nu+1} - E^n) = \Delta t^n \sum_{g=1}^{G} \alpha_{cg} (U_g^{\nu+1} - B_g^{\nu+1}) + \Delta t^n \rho Q.$$

Линеаризуем по температуре внутреннюю энергию и функцию Планка:

$$\left[E^{n+1}(T)\right]^{k+1} = \left[E^{n+1}(T)\right]^k + E_T^k\left(T^{k+1} - T^k\right),$$

$$\left[B_g^{n+1}(T)\right]^{k+1} = \left[B_g^{n+1}(T)\right]^k + B_{gT}^k\left(T^{k+1} - T^k\right),$$

где $E_T^k = \left(\dfrac{\partial E}{\partial T}\right)^k, B_{gT}^k = \left(\dfrac{\partial B_g}{\partial T}\right)^k$.

Из системы переноса получаем выражение для $U_g^{\nu+1}$:

$$U_g^{\nu+1} = U_g^{\nu+1/2} + \Delta U_g^{\nu+1} = U_g^{\nu+1/2} + b_g(B_g^{\nu+1} - B_g^{\nu}), \tag{1.16}$$

где $b_g = \dfrac{\alpha_{cg}}{\dfrac{1}{c\Delta t} + \alpha_{cg} + d_g^{\nu+1/2}}$,

$$d_g^{\nu+1/2} = \frac{\dfrac{1}{\Delta V_{ij}}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K_m}(a\Psi_g^{\nu+1/2})_{k-1/2,m-1/2}\Delta\mu_{m-1}\Delta\phi_{k-1}}{U_g^{\nu+1/2}}.$$

Подставляя $U_g^{\nu+1}$ в линеаризованное по температуре уравнение энергии, получаем:

$$T^{k+1} = T^k + \left\{\rho(E^n - E^k) + \Delta t^n \rho Q + \Delta t^n \sum_{g=1}^{G}\left[\alpha_{cg}\left(U_g^{\nu+1/2} + b_g(B_g(T^k) - B_g^{\nu})\right) - \alpha_{cg}B_g(T^k)\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\rho E_T^k + \Delta t\sum_{g=1}^{G}\left[\alpha_{cg}(1-b_g)\right]B_{gT}^k\right\}^{-1}.$$

После сходимости ньютоновских итераций k получаем температуру $T^{\nu+1} = T^{k+1}$. По новой температуре находим в центре ячейки $B_g^{\nu+1}$ и по формуле (1.16) плотность $U_g^{\nu+1}$. Внешние итерации ν заканчиваются при сходимости $U_g^{\nu+1}$ и $T^{\nu+1}$.

2. Результаты численных расчетов модельных задач

Задача 1. Решение системы уравнений нестационарного спектрального переноса излучения без учета рассеяния в неоднородной среде (задача Флека [8]).

На поверхность плоского слоя толщиной 4см падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества T=1. Слой состоит из трех физических областей. Поскольку методика DDAD ориентирована на осесимметричную геометрию, то во всех рассматриваемых задачах плоский слой заменяется на сферический слой, удаленный от оси симметрии на 100 см (рис.1).

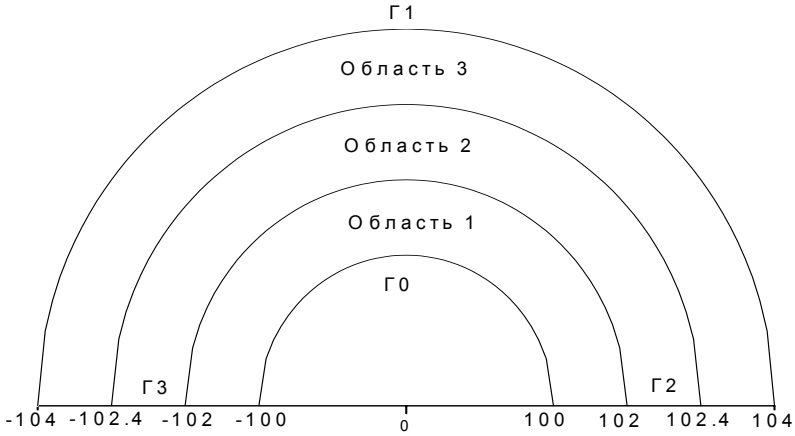

Рис.1 Геометрия задачи.

Эта задача интересна тем, что метод простой итерации сходится очень медленно, поэтому приходиться применять ускоряющие методы.

Спектральные граничные условия на верхней границе Г1 имели вид: $J_g = 0$ при $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$ (свободная поверхность). На нижней границе Г0: $J_g = \frac{1}{4\pi} B_g(T = 1)$ при $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$. Граничное условие на оси симметрии Z (границы Г2,Г3) реализуется с помощью симметричного переноса $J_g(t,0,z,\mu,\psi) = J_g(t,0,z,\mu,\pi-\psi), \quad \psi < \frac{\pi}{2}$.

Коэффициент поглощения вычисляется по формуле $\alpha_c = \frac{\chi(1-e^{-\varepsilon/T})}{\varepsilon^3}$, χ = 27 в 1, 3 областях, χ = 10000 во 2 области. Коэффициент рассеяния - $\alpha_s = 0$.

Начальная температура в 1, 2, 3 областях $T_{1,2,3}$ = 0.001, уравнение состояния вещества $E_{1,2,3}$ = 0.81T, плотность вещества $\rho_{1,2,3}$=1.

По энергетической переменной расчёты выполнены на сетке: ε_g =15.0, 12.0, 10.0, 8.0, 7.0, 6.0, 5.5, 5.0, 4.5, 4.0, 3.5, 3.0, 2.6, 2.2, 1.8, 1.4, 1.0, 0.7, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02, 0.0 (число групп 28).

Сетка в пространстве направлений $\vec{\Omega}$ соответствует ES_{12}-квадратуре.

Пространственная сетка по радиусу неравномерная в каждой области и имеет вид: 100+r_1 , где r_1= 0, 0.004, 0.04, r_4 = 0.1, . . . , r_{22} = 1.9 (18 интервалов равномерно по *r, Δr* = 0.1), r_{23} = 1.987, 1.999, 2, 2.001, 2.004, 2.013, r_{29} = 2.04, . . . , r_{37} = 2.36 (8 интервалов равномерно по *r, Δr* = 0.04), r_{38} = 2.396, 2.4, 2.404, 2.44, r_{42} = 2.5, . . . , r_{57} = 4 (15 интервалов равномерно по *r, Δr* = 0.1) ($\hat{i}$ = 57). Число интервалов в 1, 2, 3 областях - 24,14,18. Пространственная сетка по углу равномерная в каждой области – 40 интервалов.

Шаг по времени τ = 0.0002. Итерационный пересчет решения на каждом временном шаге проводился до вычисления температуры вещества с точностью 0.1% (ε_{cx}=0.001). Расчеты проводились по схемам 1 и 2 порядка аппроксимации. St-схема первого порядка считалась с параметрами $\delta = 0.5, \quad \theta = 0$. Вариант DD-схемы с пересчетом отрицательных значений интенсивности по St-схеме (DD/St-схема) приводит к расходимости итераций.

Результаты расчетов приведены на графиках, на которых представлены зависимости температур вещества от пространственной координаты. На рис.2 приведены профили температуры вещества, полученные по схемам 1 порядка (St-схема) и 2 порядка (DDAD-схема) на грубой (56 интервалов по радиусу) сетках на момент времени счета ct=9см.

Результаты сравнивается с ‘точным’ решением, полученным на подробной сетке (4000 точек по радиусу).

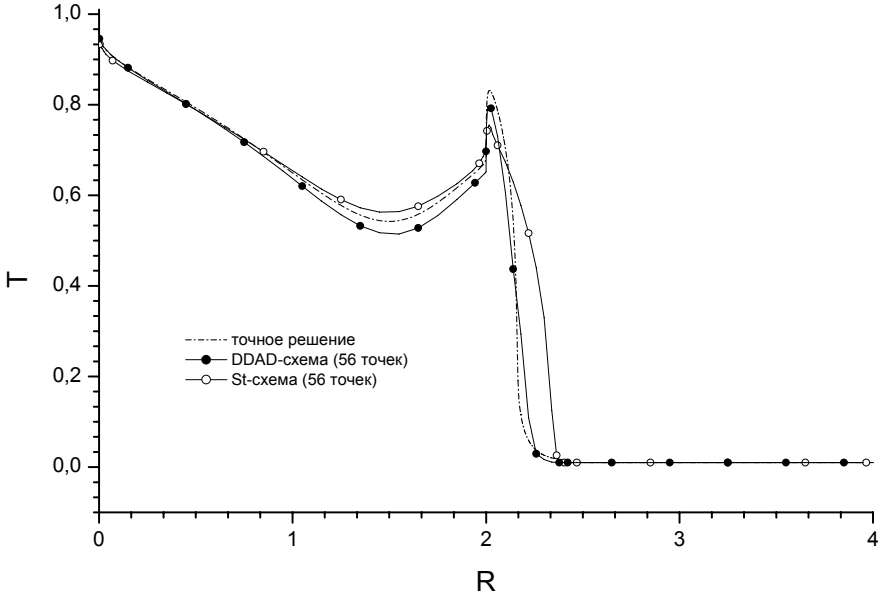

Рис.2 Профиль температуры вещества на ct =9см.

Из рис.2 видно, что схема первого порядка, в отличие от схемы второго порядка, размазывает фронт тепловой волны при прохождении через оптически плотную среду (2 область).

На рис.3 приведены профили температуры вещества, полученные по схемам 1 порядка (St-схема) и 2 порядка (DDAD-схема) на подробной (168 интервалов по радиусу) и грубой (56 интервалов по радиусу) сетках на момент времени счета ct=400см. При ct=400 решение выходит на стационар и сравнивается с точным решением, полученным на 4000 точках по радиусу.

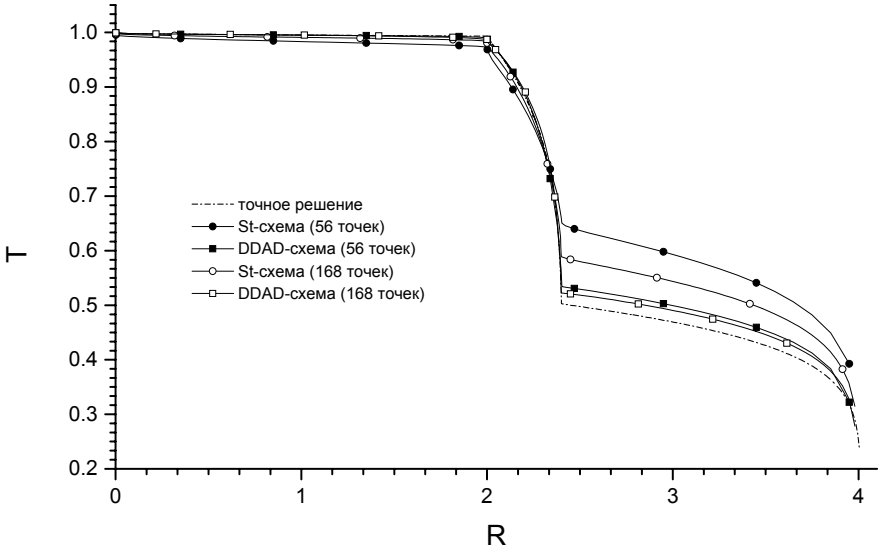

Рис.3 Профиль температуры вещества на ct=400.

Из рис.3 видно, что DDAD-схема второго порядка дает монотонный и достаточно близкий к точному решению профиль. По сравнению с St-схемой первого порядка решение по DDAD-схеме при измельчении сетки намного быстрее сходится к точному решению.

Задача 2. Точное решение системы уравнений нестационарного спектрального переноса излучения без учета рассеяния в однородной среде.

На поверхность плоского слоя толщиной 4см падает поток излучения с интенсивностью $J_\nu(x_0,t,\mu>0)=\dfrac{2\nu^3}{(0.04-0.037\mu)[e^{\frac{\nu}{5(t-0.0466x_0)}}-1]}$, соответствующий температуре вещества T=$5(t-0.0466x_0)$. Слой состоит из одной физической области. Начальная температура в области T=0.01, уравнение состояния вещества E=152.73T^4; плотность вещества ρ=1. Коэффициент поглощения вычислялся по формуле $\alpha_g=\dfrac{\varepsilon_g e^{\varepsilon_g/T}}{4T^2(e^{\varepsilon_g/T}-1)}$. Коэффициент рассеяния - $\alpha_s=0$.

Для численного моделирования в двумерной осесимметричной постановке плоский слой заменяется на сферический, удаленный от оси симметрии на 100 см (рис.1).

Спектральные граничные условия на верхней границе Г1 имели вид: $J_g=0$ при $\vec{\Omega}\cdot\vec{n}<0$ (свободная поверхность). На нижней границе Г0: $J_g(x_0=100,t,(\vec{\Omega}\vec{n})<0)=\dfrac{2\varepsilon_g^3}{[0.04-0.037(\vec{\Omega}\vec{n})][e^{\frac{\varepsilon_g}{5(t-0.0466x_0)}}-1]}$, $x=\sqrt{r^2+z^2}$. Граничное условие на оси симметрии Z (границы Г2, Г3) реализуется с помощью симметричного переноса $J_g(t,0,z,\mu,\psi)=J_g(t,0,z,\mu,\pi-\psi),\quad \psi<\dfrac{\pi}{2}$.

Начальные условия: t_0=4.66, $J_g(t_0,r,z,\mu,\psi)=0$.

По энергетической переменной расчёты выполнены на сетке: ε_g =15.0, 12.0, 10.0, 8.0, 7.0, 6.0, 5.5, 5.0, 4.5, 4.0, 3.5, 3.0, 2.6, 2.2, 1.8, 1.4, 1.0, 0.7, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02, 0.0 (число групп 28).

Сетка в пространстве направлений $\vec{\Omega}$ соответствует ES_{16}-квадратуре.

Пространственная сетка по радиусу равномерная – 40 интервалов (Δr = 0.1). Пространственная сетка по углу равномерная – 40 интервалов.

Задача считалась с постоянным шагом по времени $\Delta t = 2\cdot10^{-4}$. Константа сходимости итераций по температуре ε_{cx}=0.0001.

Численное решение на сфере сравнивалось с точным решением, полученным в одномерном плоском случае [9]:

$$T=\begin{cases}5(t-0.0466x), & t>0.0466x,\quad x=\sqrt{r^2+z^2},\\ 0, & t\le 0.0466x,\end{cases}$$

$$J_\nu=\begin{cases}\dfrac{200\nu^3}{(4-3.7(\vec{\Omega}\vec{n}))\{\exp[\nu/T]-1\}}, & t>0.0466x,\\ 0\ , & t\le 0.0466x.\end{cases}$$

Численное решение вычислялось до тех пор, когда тепловая волна достигала правой границы, т.е. до t=4.85.

На рис. 4 приведены графики температуры, полученные по схемам 1 порядка (St-схема) и 2 порядка (DDAD-схема) на момент времени t=4.8.

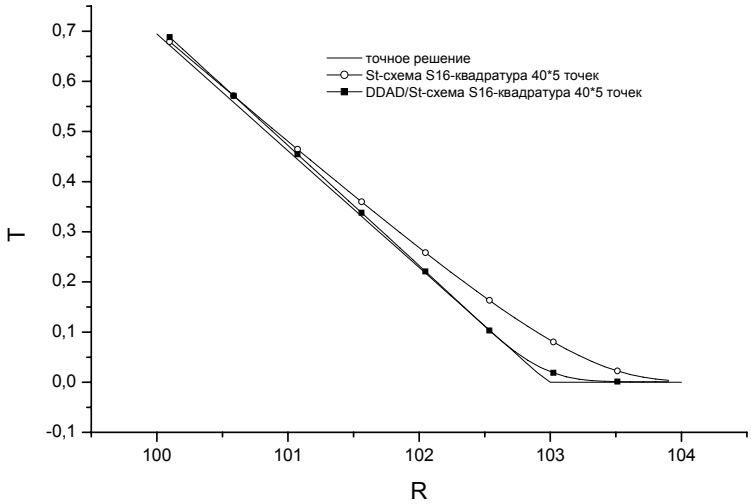

Рис. 4. Температура на момент времени t=4.8.
Из рис. 4 видно удовлетворительное согласие с точным решением.

Задача 3. Точное решение системы уравнений нестационарного ‘серого’ переноса излучения без учета рассеяния в области, состоящей из двух сред.

На поверхность плоского слоя толщиной 5см падает поток ‘серого’ излучения с интенсивностью $I\big|_{\substack{x=101\\ \mu>0}} = \dfrac{29(307+1000t)}{90+87\mu}$, соответствующий температуре вещества $T = 0.195\sqrt[4]{1000t+307}$. Слой состоит из двух веществ единичной плотности.

Уравнение состояния вещества $E = \begin{cases} 1.242T^4, x \in [101,103], \\ 10.047T^4, x \in [103,106]. \end{cases}$

Коэффициент рассеяния - $\alpha_s = 0$. Коэффициент поглощения вычислялся по формуле

$$\alpha_c = \begin{cases} \left(981.18T^4\right)^{-1}, x \in [101,103], \\ \left(327.06T^4\right)^{-1}, x \in [103,106]. \end{cases}$$

Для численного моделирования в двумерной осесимметричной постановке плоский слой заменяется на сферический, удаленный от оси симметрии на 100 см (рис.1).

Спектральные граничные условия на верхней границе Г1 имели вид: $J_g(x_1 = 106, t, (\vec{\Omega}\vec{n}) < 0) = \dfrac{29(318+1000t)}{90+87(\vec{\Omega}\vec{n})}$, $x = \sqrt{r^2+z^2}$. На нижней границе Г0: $J_g(x_0 = 100, t, (\vec{\Omega}\vec{n}) < 0) = \dfrac{29(307+1000t)}{90+87(\vec{\Omega}\vec{n})}$, $x = \sqrt{r^2+z^2}$. Граничное условие на оси симметрии Z (границы Г2, Г3) реализуется с помощью симметричного переноса $J_g(t,0,z,\mu,\psi) = J_g(t,0,z,\mu,\pi-\psi)$, $\psi < \dfrac{\pi}{2}$.

Начальные условия - при t_0=0 заданы непрерывная функция $J_g(t_0, r, z, \mu, \psi)$:

$$J_g(t_0, r, z, \mu, \psi) = \begin{cases} \dfrac{29(x+206)}{90+87(\vec{\Omega}\vec{n})}, & x \in [101,103], \quad x = \sqrt{r^2+z^2}, \\ \dfrac{87x}{90+87(\vec{\Omega}\vec{n})}, & x \in [103,106], \end{cases}$$

и кусочно-непрерывная функция T:

$$T(t_0,r,z)=\begin{cases}0.195\sqrt[4]{x+206}, & x\in[101{,}103), \quad x=\sqrt{r^2+z^2},\\ 0.24\sqrt[4]{x}, & x\in(103{,}106].\end{cases}$$

Сетка в пространстве направлений $\vec{\Omega}$ соответствует ES_{12}-квадратуре.

Пространственная сетка по радиусу имеет вид: (40 интервалов равномерно по r в 1 области (Δr=0.05) и 40 интервалов равномерно по r во 2 области (Δr=0.075)). Пространственная сетка по углу равномерная – 40 интервалов.

Задача считалась с постоянным шагом по времени $\Delta t=2*10^{-4}$. Константа сходимости итераций по температуре ε_{cx}=0.0001.

Численное решение на сфере сравнивалось с точным решением, полученным в одномерном плоском случае [10]:

$$J_g(t,r,z,\mu,\psi)=\begin{cases}\dfrac{29(x+1000t+206)}{90+87(\vec{\Omega}\vec{n})}, & x\in[101{,}103], \quad x=\sqrt{r^2+z^2},\\ \dfrac{29(3x+1000t)}{90+87(\vec{\Omega}\vec{n})}, & x\in[103{,}106],\end{cases}$$

$$T(t,r,z)=\begin{cases}0.195\sqrt[4]{x+1000t+206}, & x\in[101{,}103), \quad x=\sqrt{r^2+z^2},\\ 0.182\sqrt[4]{3x+1000t}, & x\in(103{,}106].\end{cases}$$

На рис. 5 приведены графики температуры, полученные по DDAD-схеме на подробной (40+40) и грубой (5+5) сетках на моменты времени t=0.005, 0.01.

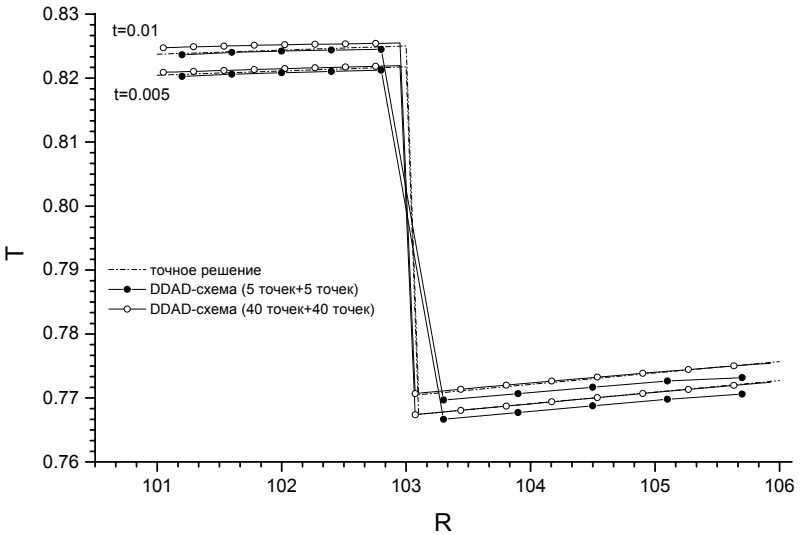

Рис. 5. Температура на моменты времени t=0.005, 0.01.

Из рис. 5 видно хорошее согласие с точным решением на подробной сетке.

Заключение

Как показали численные расчеты, метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) в сочетании с ВДМ-методом ускорения итераций является достаточно эффективным алгоритмом решения задач переноса теплового излучения в многогрупповой кинетической модели на произвольных четырехугольных сетках.

Литература

1. Гаджиев А.Д., Селезнев В.Н., Шестаков А.А. DSn-метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели. ВАНТ, 2003, в.4, с.33-46.
2. Белл Д., Глесстон С. Теория ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1974.
3. Carlson B.G. A method of characteristics and other improvements in solution methods for the transport equation. Nucl. Sci. Eng., 1976, 61, #3, p.408-425.
4. Трощиев В.Е. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором. ЖВМиМФ, 1976, т.16, №3, с.793-797.
5. Зуев А.И., Карлыханов Н.Г. Метод решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса. ЖВМ и МФ, т.23,1983, №4, с.910-921.
6. Гусев В.Ю., Козманов М.Ю., Рачилов Е.Б. Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения. ЖВМ и МФ, 1984, т24, №12, с. 1842-1849.
7. Alcouffe R.E., Clark B.A., Larsen T.W. The Diffusion-Synthetic Fcceleration of Transport Iteration, with Applications to a Radiation Hydrodynamics Problem. Multiple Time Scales, edited by J.U. Brackbill and B. Cohen, Academic Press, Orlando, FL, 1985, pp.73-112.
8. Fleck J.A., Cummings J.D. J. Comput. Phys., 1971, v.8, h.313-342
9. Андреев Е.С., Думкина Г.В., Козманов М.Ю. О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и спектрального нестационарного переноса излучения. ЖВМ и МФ, 1981, т.21, в.4, с.1054-1055.
10. Андреев Е.С., Козманов М.Ю., Рачилов Е.Б. Точные решения системы уравнений переноса излучения с разрывом на границе раздела двух сред. ЖВМ и МФ, 1984, т.24, в.1, с. 161-163.