Решение многомерных задач механики сплошных сред на неструктурированных лагранжевых сетках

Соколов С.С.

Российский федеральный ядерный центр – ВНИИЭФ, проспект Мира, 37, Саров, Нижегородская область, Россия

В докладе даётся обзор работ выполненных во ВНИИЭФ, связанных с рассмотрением вопросов о возможности применения неструктурированных лагранжевых сеток для решения многомерных задач механики сплошных сред с большими сдвиговыми деформациями и вихревыми течениями. Приводится краткое описание трёх численных методик, базирующихся на методе конечных разностей, для решения задач механики сплошных сред на многогранных неструктурированных лагранжевых сетках. Приводятся примеры численных расчетов модельных задач.

Введение

Для численного решения нестационарных задач механики сплошных сред широкое распространение получили конечно разностные методы. Уже в середине 50-х годов были разработаны первые методики, которые были способны численно решать задачи газодинамики в двумерной постановке. По мере развития вычислительной техники начали разрабатываться и методики для численного моделирования трёхмерных течений, которые являлись обобщением двумерных методик на трёхмерный случай. В основном численные методики для расчёта двумерных течений сплошных сред используют регулярные четырёхугольные сетки, а для трёхмерных течений - регулярные шестигранные сетки. При этом решение задач с небольшими деформациями материалов обычно проводятся на лагранжевых сетках, а решение задач с большими сдвиговыми деформациями материалов и струйными течениями - эйлеровых или лагранжево-эйлеровых сетках. Более широкое использование для решения задач механики сплошных сред регулярных сеток связано с достаточно высокой экономичностью и простотой алгоритмов счёта.

Начало работ по созданию методик на неструктурированных сетках во ВНИИЭФ было положено в середине шестидесятых годов И.Д.Софроновым с указанием практической значимости использования такого подхода (Софронов (1966)). Сетки в виде многоугольников и многогранников произвольной конфигурации позволяют снять ряд трудностей при построении начальной сетки, которые присущи регулярным сеткам, намного упрощая способы построения начальных сеток с заданными свойствами в областях сложной формы. Методики на

неструктурированных сетках позволяют вводить аппарат локальной перестройки сетки, как с изменением количества точек, так и с изменением количества соседства точек. Это позволяет расширять возможности проведения расчётов с большими сдвиговыми деформациями вещества в лагранжевых переменных. Поэтому методики с неструктурированными сетками целесообразней применять при решении задач со сложной геометрией, плохо описываемых с применением матричной сетки, с большими сдвиговыми деформациями и струйными течениями. Кроме этого, точность расчётов, выполненных в лагранжевых переменных, как правило, превышает точность расчётов с тем же числом точек, выполненных в эйлеровых переменных. Работы по созданию методик для решения задач механики сплошных сред на неструктурированных сетках во ВНИИЭФ ведутся разными коллективами по двум направлениям, использующим лагранжевые и свободно лагранжевые методы. На базе неструктурированных многоугольных сеток были созданы методики ДМК и МЕДУЗА (Софронов и др. (1984)) первоначально для расчёта двумерных задач газодинамики, затем с учётом теплопроводности (Панов (2004)), упругопластичности (Соколов (2004)) и магнитной гидродинамики. В 1987 году И.Д. Софроновым и В.В. Рассказовой было предложено обобщение двумерной лагранжевой методики ДМК на трёхмерный случай – методика ТМК (Рассказова, Софронов (1987), Рассказова и др. (1998)). Обобщением свободно лагранжевой методики МЕДУЗА для решения трехмерных задач газовой динамики на неструктурированных сетках является методика МЕДУЗА-3Д (Бутнев и др. (2003)).

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения сплошной изотропной среды:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{u}; \\ \rho \dfrac{d\vec{u}}{dt} = -\operatorname{grad} P + \operatorname{div} S + \dfrac{1}{4\pi}\left[\operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H}\right]; \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\vec{H}}{\rho}\right) = \left(\dfrac{\vec{H}}{\rho} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u} \\ \dfrac{dE}{dt} = -P\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho} S_p\left(SD\right) + \dfrac{1}{\rho}\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T); \\ \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}, \end{cases} \tag{1}$$

где ρ - плотность вещества, E - удельная внутренняя энергия, T - температура, κ - коэффициент теплопроводности, $\vec{u} = (u, v, w)$ - вектор скорости, $\vec{r} = \left(x, y, z\right)$ - радиус-вектор, P - давление, S - девиатор тензора напряжений, D - тензор скоростей деформации, $S_p\left(SD\right)$ - первый инвариант тензора SD, $\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля.

Для замыкания системы дифференциальных уравнений используем уравнение состояния среды: $P = P^{\Gamma}\left(\rho, E\right)$. (2)

Если для описания среды используется газодинамическая модель, то $S = 0$. Если для описания среды используется упругопластическая модель, то: $S = S^{\text{уп}}$; $P = P^{\text{г}}$. В этом случае для определения девиаторной составляющей тензора напряжения используем закон Гука в дифференциальной форме:

$$\frac{\delta S^{\text{уп}}}{\delta t} = 2G\left(D - \frac{1}{3}S_p D\right) \tag{3}$$

где G - модуль сдвига; $\frac{\delta}{\delta t}$ - производная по времени вдоль направления движения.

В области пластических деформаций используем условие текучести Мизеса для корректировки девиатора тензора напряжений: $\frac{3}{2}S_{ij}^{\text{уп}}S_{ij}^{\text{уп}} = Y^2$, (4)

где Y - предел текучести, который может быть как константой (для идеально-пластических сред), так и некоторой функцией (для материалов с упрочнением).

Если для описания материала используется упруговязкопластическая модель, то:

$$P = P^{\text{г}} + P^{\text{в}};\ S = S^{\text{уп}} + S^{\text{в}},\ \ P^{\text{в}} = \frac{1}{3}\mu_1 S_P D;\ S^{\text{в}} = \mu_2\left(D - \frac{1}{3}S_P D\right); \tag{5}$$

где $P^{\text{г}}$ - из уравнения (2); $S^{\text{уп}}$ - из уравнений (3), (4); $P^{\text{в}}, S^{\text{в}}$ – вязкие давление и девиатор тензора напряжений; μ_1, μ_2 - значения динамической вязкости.

Основные особенности методики ТМК

Первой трёхмерной методикой для расчёта трёхмерных задач газодинамики на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках во ВНИИЭФ была методика ТМК, разработанная под руководством И.Д.Софронова и В.В.Рассказовой (Рассказова и Софронов (1987), Рассказова и др. (1998)). В дальнейшем в рамках этой методики была реализована возможность для расчёта нестационарных упругопластических течений (Соколов (2002)). Для решения разностных уравнений газовой динамики и упругопластичности используется явная разностная схема, которая позволяет определить скорости в узлах сетки, а плотности, энергии, давления и напряжения определяются внутри ячеек сетки. При построении конечно разностной схемы используется разнесённый шаблон центрирования: кинематические величины определены в узлах разностной сетки, термодинамические – в центрах ячеек. Для определения скоростей узлов сетки используется интегральная форма записи закона сохранения импульса, проинтегрированного по объему, охватывающему узел со стороны четырех ячеек прилегающих к узлу. В качестве счетной сетки используются выпуклые многогранники произвольной конфигурации (рис.1а).

Заполнение пространства фигурами без складок и зазоров производится нерегулярным способом, но с обязательным выполнением условия – число ячеек, сходящихся в любом узле сетки, не более четырех. Это условие всегда выполнимо, если в качестве выпуклых многогранников использовать в начальный момент времени интегрирования ячейки Дирихле или фигуры Вороного. Сетка описывается с помощью координат и связей узлов сетки, используя на стадии

начального построения сетки Дирихле координаты центров ячеек. Соседями каждого узла сетки являются четыре узла и четыре ячейки сетки. Связи каждого узла сетки упорядочены. Имея минимальную информацию о сетке всегда можно получить любую необходимую информацию (определить число и номера узлов сетки, из которых состоит грань, разделяющая данные ячейки; определить номера всех соседних ячеек). Алгоритм построения сетки Дирихле имеет рекуррентный характер. Через N шагов получаем готовую сетку Дирихле из N ячеек (рис.1.б). В начальный момент времени сетка состоит из выпуклых многогранников с плоскими гранями.

Для поддержания сетки в «хорошем» состоянии в процессе численного расчёта используется методика упругого удара, разработанная В.В.Рассказовой (Рассказова и др. (1998)), которая позволяет сохранять выпуклыми относительно центра фигуры трёхгранные углы в процессе всего времени интегрирования, и методика локальных структурных перестроек многогранных ячеек. Методика ТМК предназначена для численного решения трехмерных задач газодинамики и упругопластичности в однообластной постановке на нерегулярных многогранных сетках с фиксированной структурой соседства.

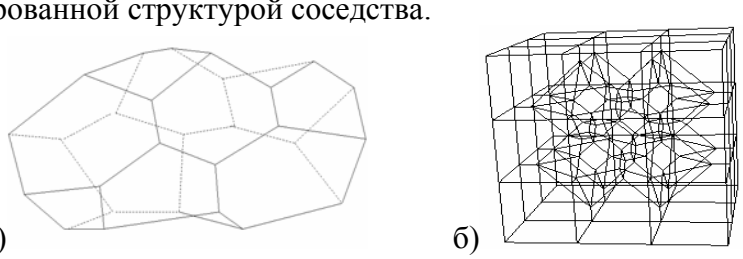


Рисунок 1 – Ячейка трехмерной сетки а) и сетка Дирихле, заполняющая куб –б).

Основные особенности методики МЕДУЗА-3Д

Основными особенностями свободно лагранжевой методики МЕДУЗА-3Д (Бутнев и др. (2003)) являются: использование нерегулярной сетки, центрирование всех газодинамических величин в узле, переменный разностный шаблон для численного интегрирования дифференциальных уравнений и возможность изменения топологии сетки в процессе решения. Контактные границы описываются смешанными ячейками, для расчета которых применяется метод концентраций. Методика решения трехмерных задач газовой динамики на неструктурированных сетках является обобщением методики МЕДУЗА-2Д (Софронов и др. (1984)) решения двумерных задач.

Решение системы (1) для случая газодинамики ищется внутри области определения задачи с заданными начальными и граничными условиями. Рассматривается множество точек (узлов сетки), которым приписываются значения всех термодинамических и кинематических функций. Начальное распределение точек задается исходя из начальных и граничных условий задачи, а также из априорных соображений о решении задачи. Для каждой точки определяется множество ее соседей на основе евклидовой метрики. Определение соседства осуществляется с помощью метода тетраэдризации. Множество точек с установленным соответствием соседства порождает сетку задачи. Используется однообластная модель решения задачи. Это приводит к возникновению на границах сред смешанных ячеек, решение в которых ищется на основании

многокомпонентного подхода. Ячейки сетки представляют собой многогранники, внутри которых находятся узлы сетки; в узлах центрированы все кинематические и термодинамические величины.

В основе алгоритма построения ячейки лежит привлечение центров масс тетраэдров, центров масс граней тетраэдров и центров ребер. Для хранения топологии сетки используется подход, при котором точка ссылается на произвольный примыкающий к ней тетраэдр, а каждый тетраэдр ссылается на четыре примыкающих к нему тетраэдра и четыре свои вершины. Использование тетраэдров позволило решить проблему выделения контактной поверхности в смешанной ячейке, если сам узел и его смешанные соседи лежат на лагранжевой поверхности. В этом случае, приписав на начальной стадии свойство вещества каждому тетраэдру, мы будем сохранять тетраэдры «чистыми» до тех пор, пока не осуществим сдвиг точки (раздвижку) или перестройку сетки, приводящие к появлению смешанных тетраэдров. Интегрирование уравнения движения в трехмерном случае сводится к вычислению поверхностного интеграла $\iint\limits_{\Delta}(P+q)\vec{n}dS$, где P, q – материальное и вязкое давление, $\vec{n}$ – вектор внешней нормали, dS – площадь треугольника, Δ - все треугольники, образующие поверхность ячейки интегрирования. Как видно из рис.2а, каждая грань ячейки интегрирования представляет собой треугольник (для определенности рассмотрим треугольник OId), вершинами которого являются центр тетраэдра O, центр одной из граней тетраэдра I и середина одного из ребер тетраэдра d. Будем определять значения давления в этих точках с помощью линейных комбинаций значений в вершинах тетраэдра 1,2,3,4. После этого значение полного давления на грани определяем как среднее арифметическое значений полных давлений в вершинах треугольника:

$$(P+Q)_{OId}=\frac{13(P+q)_1+2(P+q)_2+13(P+q)_3+7(P+q)_4}{36} \qquad (6)$$

В том случае, когда соответствующая грань ячейки интегрирования лежит на границе с заданным граничным давлением, величина давления на грани не рассчитывается вышеописанным способом, а берется непосредственно из граничного условия. Суммарный вектор силы, действующий на ячейку, вычисляется путем суммирования с соответствующим знаком элементарных сил, действующих на элементарные треугольники каждого тетраэдра.

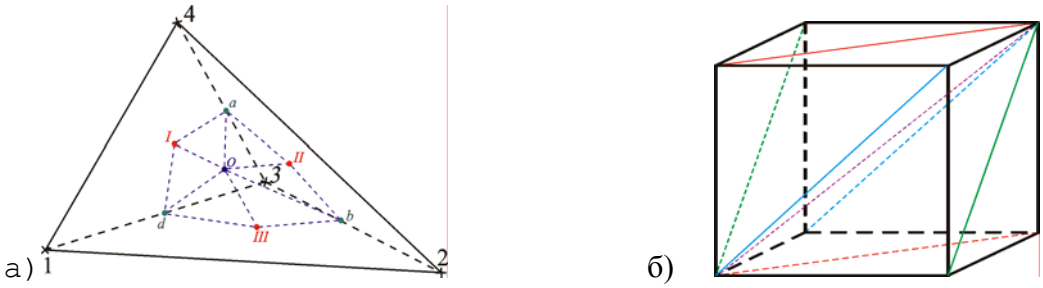


Рисунок 2 - Шесть треугольников поверхности интегрирования, отнесенных к узлу 3, -а); разбиение шестигранника на тетраэдры – б)

Начальная неструктурированная сетка строится из регулярной шестигранной посредством одинакового разбиения каждого шестигранника на шесть тетраэдров. На рисунке 2б) изображен пример разбиения шестигранника.

Для подавления высокочастотных возмущений используется оператор сглаживания поля скоростей $O(\tau \cdot h^3)$.

Основные особенности методики ТИМ

Методика ТИМ (Соколов и др. (2004)) предназначена для расчета трехмерных задач механики сплошных сред на многогранных неструктурированных лагранжевых сетках. Она позволяет проводить расчеты на сетках с произвольным количеством связей в узлах (количество примыкающих ячеек). Методика работоспособна как на неструктурированных многогранных сетках типа Дирихле-Вороного, так и на шестигранных сетках, и неструктурированных многогранных сетках, имеющих произвольное количество соседств в узле. Для всех типов сеток используется единый счетный алгоритм. Для расчета начальных данных и решения уравнений механики сплошных сред используется декартова система координат. Методика предназначена для расчета задач газодинамики, нестационарной упругопластичности, магнитной гидродинамики, теплопроводности.

Решение поставленной задачи будем искать в декартовой системе координат (x, y, z) в некоторой области V, ограниченной поверхностью C, в предложении, что заданы все необходимые начальные и граничные данные. При построении конечно разностной схемы для решения системы дифференциальных уравнений (1) используется интегро-интерполяционный метод при следующих предположениях:

1) величины $P, \rho, E, q, S_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \vec{H}, T$ – относятся к центрам многогранников (ячеек) и постоянны внутри них;
2) величины x, y, z – относятся к вершинам многогранников (узлам);
3) величины u, v, w – определяются в вершинах многогранников и постоянны внутри объёмов, относящихся к узлам;
4) для описания граней используется кусочно-линейчатое их представление.

Для вычисления объёма ячейки рассмотрим счетную ячейку, состоящую из N-вершин (узлов). При деформации ячейки её грани, представляющие собой многоугольники в пространстве, могут быть не плоскими. Для этого ячейка разбивается на систему тетраэдров, вершинами каждого из которых являются - центр счетной ячейки, центр грани и две соседние вершины этой грани. Объём ячейки определяем как сумму объёмов этих тетраэдров. Масса узлов определяется как сумма долей (приходящихся на каждую вершину) масс ячеек, сходящихся в данном узле. Массы узлов и массы ячеек в процессе счета не меняются.

При решении нестационарных задач газодинамики и упругопластичности (Соколов (2002)) используется явная полностью консервативная разностная схема. На равномерных сетках она имеет второй порядок точности по пространству и времени. В качестве искусственной вязкости используется комбинация квадратичной и линейной вязкостей. Для определения скоростей узлов сетки используется интегральная форма записи закона сохранения импульса. Интегрирование производится по объему V, охватывающему узел со стороны ячеек, прилегающих к узлу, ограниченному поверхностью C, с применением формулы Гаусса-Остроградского:

$$\iiint_V \rho \frac{du}{dt} dV = \iiint_V \left(-\frac{\partial(P+q)}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial y} \right) dV = \iint_C \left(-(P+q)\vec{i} + S_{xx}\vec{i} + S_{xy}\vec{j} + S_{xz}k \right) \vec{n} dC \qquad (7)$$

$$\iiint_V \rho \frac{dv}{dt} dV = \iint_C \left(S_{xy}\vec{i} + (S_{yy} - P - q) \right) \vec{j} + S_{yz}\vec{k}) \vec{n} dC; \quad \iiint_V \rho \frac{dw}{dt} dV = \iint_C (S_{xz}\vec{i} + S_{yz}\vec{j} + (S_{zz} - P - q)\vec{k}) \vec{n} dC,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатные орты, $\vec{n}$ – нормаль к поверхности C.

При решении задач магнитной гидродинамики с вмороженным полем вектор напряженности магнитного поля относится к центрам ячеек сетки, векторы плотности тока и электромагнитной силы – к узлам сетки. Используется явная полностью консервативная разностная схема. Для решения уравнения магнитной индукции уравнение интегрируется по счетной ячейке Ω. Пусть объем ячейки равен V. Проинтегрировав обе части уравнения по Ω, получим равенство:

$$\frac{d\left(\vec{H}V\right)}{dt} \approx H_x \int_{\partial\Omega} \vec{u} dydz + H_y \int_{\partial\Omega} \vec{u} dzdx + H_z \int_{\partial\Omega} \vec{u} dxdy \qquad (8)$$

Интегралы в правой части этого равенства заменяются конечными суммами.

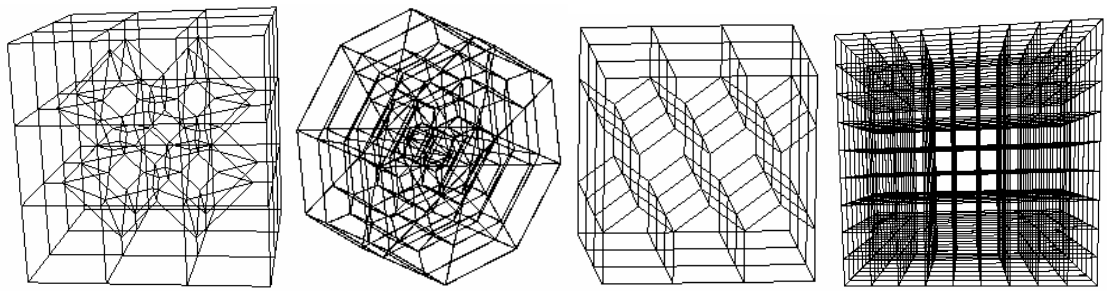
При решении уравнения теплопроводности значение температуры относится к центрам ячеек, а вектор потока тепла - к узлам. Разностная схема строится с помощью применения операции обобщенного дифференцирования разрывных функций и является неявной и консервативной (Панов (2004)). Аппроксимация дифференциального оператора в уравнении теплопроводности на равномерных сетках имеет второй порядок точности по пространству. Получающаяся разностная система линейных уравнений имеет симметричную и положительно определенную матрицу. Система уравнений решается итерационным методом сопряженных градиентов с использованием различных видов предобуславливателей, таких, как неполное разложение Холецкого, блочный метод Шварца и других.

Типы начальных сеток, используемых в методике ТИМ

Начальная счётная сетка для расчета задач может быть следующих типов:

- Неструктурированная многогранная сетка из ячеек Дирихле или тел Вороного (внутренний узел окружает четыре ячейки) рис.3.а.
- Неструктурированная многогранная сетка, полученная из двумерной нерегулярной сетки рис.3.б-в. Она может быть получена поворотом двумерной сетки вокруг оси или путем «перемещения» листа с двумерной сеткой в пространстве. Во внутренних узлах этой сетки сходятся шесть ячеек.
- Шестигранная сетка (описанная нерегулярной структурой с произвольным соседством) рис.3.г. Во внутренних узлах этой сетки сходятся восемь ячеек.

Для расчета сложных по геометрии задач может использоваться в качестве начальной сетка, состоящая сразу из нескольких типов сеток в одной области (например, из шестигранников и многогранников одновременно) рис.4.



а) б) в) г)

Рисунок 3 – Сетка Дирихле-Вороного - а); неструктурированные сетки, полученные из двумерной сетки - б) и в); шестигранной сетки г)

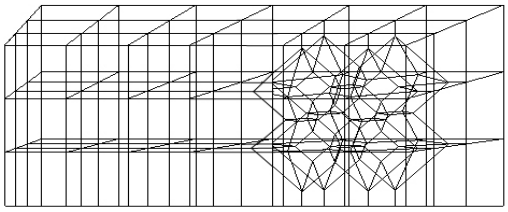


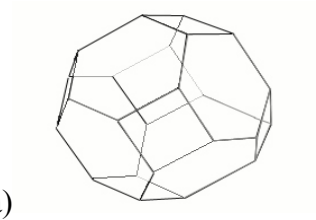
Рисунок 4 – Пример счетной сетки, где в одной счетной области присутствуют шестигранные ячейки и ячейки типа Дирихле-Вороного

Поддержание приемлемой счетной сетки в методике ТИМ

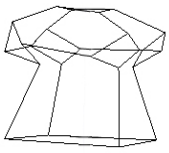
Как известно, при проведении численных расчётов по лагранжевым методикам с большими деформациями одной из проблем является поддержание приемлемой счетной сетки. В методике ТИМ для работы со счётной сеткой разработаны специальные методы, которые могут использоваться одновременно при проведении численных расчётов в любых сочетаниях.

Первый метод. Для корректировки счетной сетки в большинстве методик накладывается ограничение – выпуклость счетных ячеек. Условие выпуклости ячеек даёт достаточно сильное ограничение по сетке, особенно для трехмерных многогранников. Для поддержания счетной сетки без перехлестов условие выпуклости всех ячеек является избыточным. Допуская наличие невыпуклых ячеек, можно значительно расширить возможности для алгоритмов расчета начальной сетки. Здесь стоит отметить, что под приемлемой счетной сеткой мы понимаем сетку, в которой отсутствуют самопересекающиеся ячейки. Гранями ячеек являются многоугольники в пространстве, которые не являются плоскими фигурами. Поддержание приемлемой счетной сетки осуществляется с применением методики наложения дифференцируемых связей, в которой реализовано несколько алгоритмов поддержания приемлемых счетных сеток (см. рис. 5):

- сетки, содержащие «звездные» ячейки (все узлы ячейки находятся в прямой видимости из ее центра);
- сетки с выпуклыми двугранными углами ячейки (двугранный угол образуется двумя гранями одной ячейки с общим ребром);
- сетки с выпуклыми многогранными углами ячеек (многогранный угол образуется ребрами ячейки, выходящими из одного узла).



а)



б)

Рисунок 5 – Выпуклая ячейка – а); не выпуклая «звёздная» ячейка - б)

Второй метод. При расчёте задач с большими сдвиговыми деформациями, вихревыми и струйными течениями ячейки могут вытягиваться в одном из направлений, что приводит к нарушению аппроксимации решения, либо ячейки могут сильно сжиматься, что приводит к уменьшению счетного шага. Для более успешного применения методики в численных экспериментах, она оснащена аппаратом локальных перестроек многогранных сеток. При этом после проведения локальной перестройки сетки, в узле может сходиться произвольное количество ячеек. Локальные перестройки трехмерной сетки базируются на двух операциях - дробление ячейки и объединение ячеек.

Третий метод основан на сглаживании поля скоростей в узлах счётной сетки для подавления высокочастотных колебаний. Использование его позволяет получать более гладкие решения и повышать качество счётной сетки, уменьшая нагрузку на работу алгоритмов, реализующих первые два метода.

Расчет задач в многообластной постановке по методике ТИМ

При решении сложных трехмерных задач начальную геометрию системы часто приходится разбивать на счетные области. Такое разбиение иногда бывает необходимо для более точного описания взаимодействующих тел с выделенными поверхностями скольжения (контактная поверхность). Грани многогранных ячеек в процессе счёта не являются плоскими фигурами (в том числе и граничные). Поэтому для решения задачи контактного взаимодействия на поверхности раздела двух сред сначала производится триангуляция двух взаимодействующих поверхностей (вводится дополнительная сетка, состоящая из треугольников). Триангуляция контактирующей поверхности с помощью дополнительной сетки производится из центров граничных граней к её узлам. На эту вспомогательную сетку пересчитываются все необходимые кинематические величины для расчёта контактного взаимодействия.

Примеры расчетов

Задача о произвольном распаде разрыва в газодинамической постановке

Рассмотрим численное решение задачи о распаде произвольного разрыва. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ слева и справа от плоскости $x = 0.5$ расположен идеальный газ, состояние которого характеризуется следующими параметрами: слева – $\rho_I = 1;\ P_I = 2.5;\ u_I = 0$, а справа $\rho_{II} = 1;\ P_{II} = 0.5;\ u_{II} = -2.8026$. Показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. Все поверхности области представляют собой «жесткие стенки». Сравнение результатов численного решения задачи по методике

ТИМ для разного количества точек вдоль направления движения ударной волны и аналитическое решение на момент времени $t = 0.24$ представлены на рис.6.

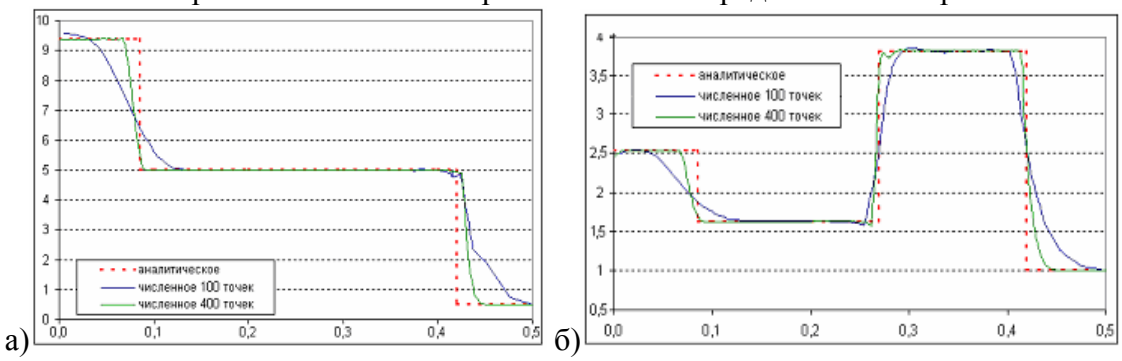


Рисунок 6 – Распределение давления - а) и плотность - б) на $t = 0.24$

Задача о плоской волне напряжения

Рассмотрим плоскую упруго-пластическую задачу, имеющую точное решение, о деформации полупространства. Начальная геометрия представляет собой прямоугольный брусок с размерами: $|AB| = 1.5$см, $|AA'| = |AD| = 0.5$см. Число точек по задаче было задано 1200. Начальные условия: $\rho_0 = 1$ г/см^3, $\vec{u} = 0$, $E_0 = P_0 = S_{x_i x_i} = 0$. Для описания материала использовалось уравнение состояния $P = (\gamma - 1)\rho E$ с показателем адиабаты $\gamma = 3$ и идеальная упругопластическая модель. Упруго пластические характеристики материала $G = 15$ ГПа, $Y_0 = 1$ ГПа. На левой границе задается постоянное по времени давление $P_{\text{гр}} = 5$ ГПа, все другие границы – жесткие стенки. Расчёт проводился по методике ТИМ. На рис.7.а – 7.в приведены результаты численного расчёта и аналитическое решение на момент времени $t = 2.4$ мкс. В результате расчета получено расщепление ударной волны на две: впереди распространяется упругая волна со скоростью $D_{\text{упр}} = 4.52$ км/с, а за ней – пластическая волна $D_{\text{пл}} = 3.26$ км/с. Результаты расчетов хорошо согласуются с аналитическим решением ($D_{\text{упр}} = 4.5$ км/с, $D_{\text{пл}} = 3.25$ км/с).

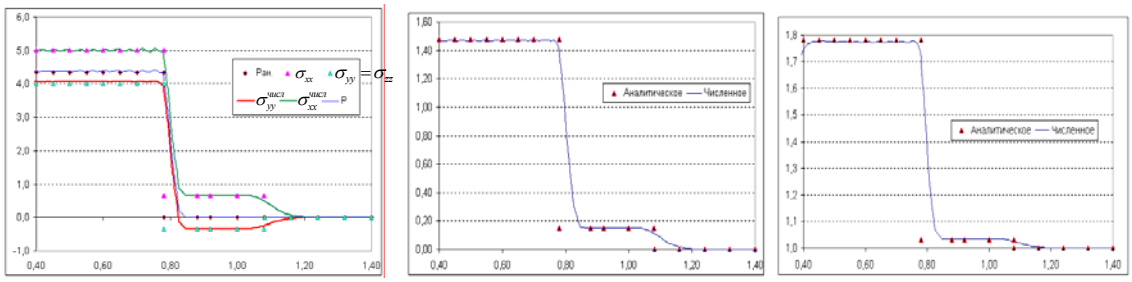


Рисунок 7 – Задача о плоской волне напряжения: а*)* профили давлений и напряжений; б*)* профили скоростей; в*)* профили распределения плотности

Задача о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

Размеры счетной области: 0≤X≤12см, 0≤Y≤12см, 0≤Z≤24 см. Область занята фреоном и воздухом. Размеры области, занятой фреоном: 0≤X≤6см, 0≤Y≤6см,

0≤Z≤9 см. На верхней границе задана постоянная скорость: $\vec{U}$ = (0,0,-21.056456 см/мс). В воздухе давление P_1=1 атм, плотность ρ_1=0.001205 г/см^3. Во фреоне P_2=1 атм, плотность ρ_2 = 0.00513 г/см^3. Уравнение состояния вещества – идеальный газ с γ_1=1.4 для воздуха и γ_2=1.139 для фреона. Расчёт проводился по методике МЕДУЗА-3Д. На рисунке 8 приведены результаты численного расчёта задачи на момент времени **t**=0.764 мс с изображением формы фреона и поля давления**.**

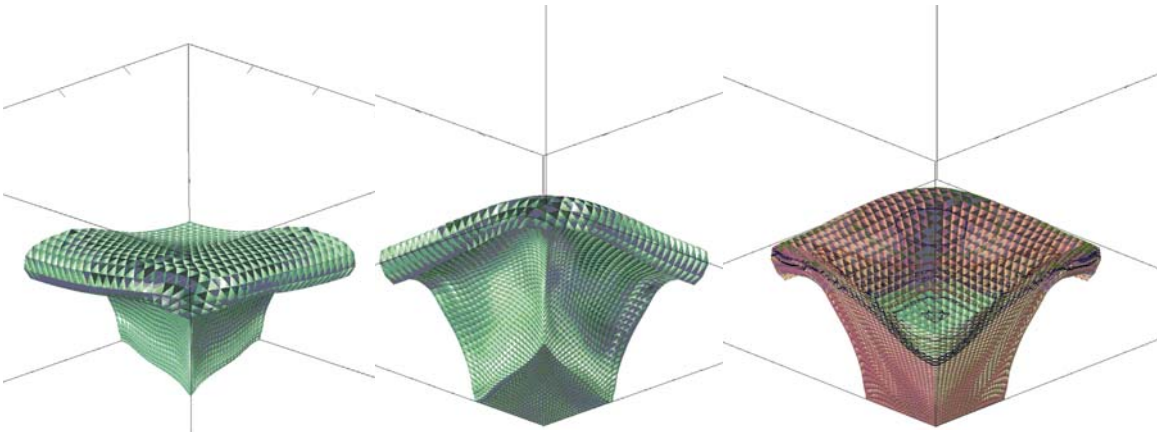


Рисунок 8 - Форма фреона и поле давления в момент времени **t=0.764 мс**

Задача об ударе стержня о преграду

Для проверки работоспособности методик ТМК и ТИМ для расчёта задач с большими деформациями проведен расчет задачи об ударе стержня в преграду, проведенном в газодинамическом и упругопластическом приближениях.

Газодинамический расчет. Для описания материала ударника и преграды использовалось уравнение состояния идеального газа с $\gamma = 1.4$. В данной задаче ударник, заданный в виде параллелепипеда с размерами $2 \times 2 \times 10$ см, летящий со скоростью 10 км/с, соударяется с телом, имеющим форму куба с ребром 10 см. Начальная плотность $\rho_0 = 1$, давление и энергия задавались равными нулю. На гранях ударника задано граничное условие «свободной границы», у преграды на всех гранях, кроме поверхности соударения, заданы граничные условия типа «жесткой стенки». Расчет проводился по методикам ТМК и ТИМ на лагранжевой сетке Дирихле-Вороного с общим количеством счётных ячеек равным 31 400.

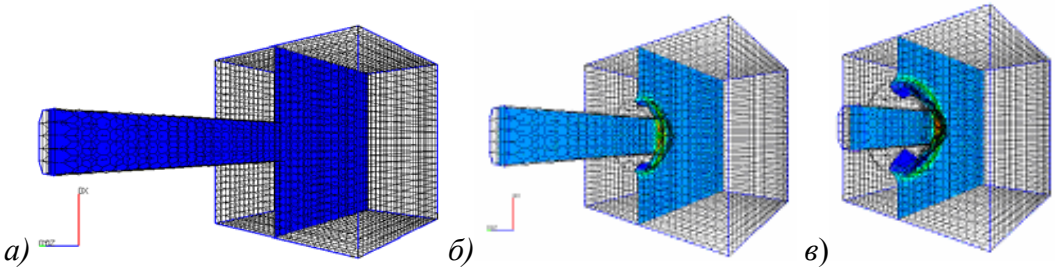


Рисунок 9 – Внедрение ударника в преграду, газодинамический расчет:
а) начальная геометрия; *б)* t =3.5 мкс; *в)* t =7 мкс

Начальная геометрия задачи динамика внедрения ударника в преграду с изображением счетной сетки и сечения плоскостью Oxz с заливкой по величине плотности вещества представлена на рис. 9.

Упругопластический расчет. Вещество в ударнике и в пробиваемом теле задавалось сталью. Для описания стали использовалось уравнение состояния в форме Ми-Грюнайзена и модель идеальной упругопластичности с параметрами: $\rho_0 = 7.8$ г/см^3; $c_0 = 4.9$ км/с; $n = 5$; Г=1.66; $\sigma_s = -2.5$ ГПа; $G = 81$ ГПа; $Y = 1.05$ ГПа. Начальная трехмерная сетка, размеры и формы ударника и преграды аналогичны предыдущему расчёту. Скорость ударника равна 1 км/с. Начальная плотность $\rho_0 = 7.8$ г/см^3, давление и энергия равны нулю. На гранях ударника задано граничное условие «свободной границы», у преграды на всех гранях, кроме поверхности соударения, заданы граничные условия типа «жесткой стенки». Расчет данной задачи был проведен до момента времени 40 мкс по методикам ТМК и ТИМ. На рис. 10 представлена динамика внедрения ударника в преграду с изображением счетной сетки и сечения плоскостью Oxz с заливкой по величине плотности вещества.

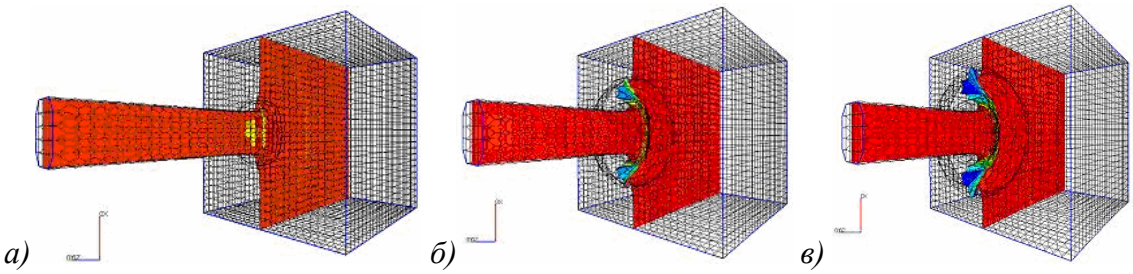
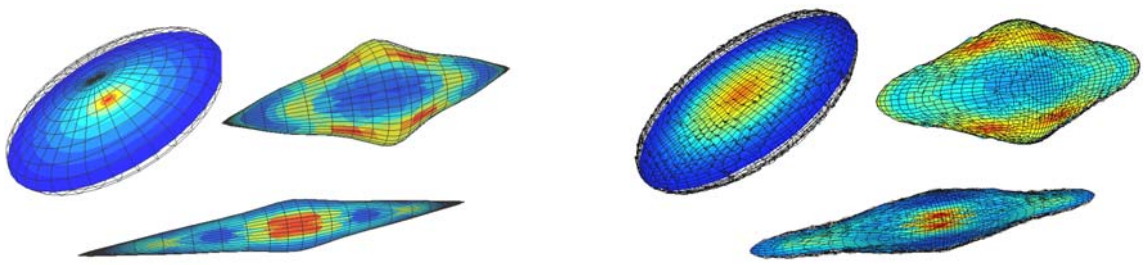


Рисунок 10 – Динамика внедрения ударника в преграду, упругопластический расчет: *а)* $t = 10$ мкс; *б)* $t = 30$ мкс; *в)* $t = 40$ мкс

Задача об обжатии эллипсоида

Для проверки методик на «безавостность решения» задач с большими деформациями был выполнен расчёт об обжатии эллипсоида с использованием алгоритмов сглаживания поля скоростей. В начальный момент времени $t = 0$ рассчитываемая область представляет собой эллипсоид с полуосями $a = 1.5$; $b = 1.5$; $c = 1$. Эллипсоид заполнен однородным покоящимся идеальным газом с уравнением состояния $P = (\gamma - 1)\rho E$, плотностью $\rho = 200$, $\gamma = 1.3333$. В начальный момент начинается обжатие эллипсоида постоянным давлением, изменяющимся со временем по закону: $P(t) = t$ при $0 < t < 5$, $P(t) = t$ при $t \geq 5$. Расчёты проводились по методике ТИМ с использованием шестигранной (8000 точек) и многогранной сетки (22575 точек). На рисунке 11 приведены формы расчётных областей на моменты времени $t = 9.0$, $t = 15.0$ и $t = 20.0$ с распределением давления в сечении OXY для шестигранной (рис.11а) и многогранной (11б). На моменты времени: $t = 9.0$ эллипсоид имеет форму диска; $t = 15.0$ форма эллипсоида близка к области. К моменту $t = 20.0$ происходит ещё большее удлинение и сплющивание эллипсоида. Качественно картина поведения эллипсоида в расчётах совпадают. Отметим, что задача считались в безавостном режиме до момента времени $t = 50.0$.



а) б)

Рисунок 11 – Динамика обжатия эллипсоида с отображением сетки в сечении OXY

Задача об остывании куба

Для проверки работоспособности методики ТИМ при решении уравнения диффузии были проведены расчеты задачи об остывании куба. Для нее уравнение диффузии имеет вид: $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. Счетная область представляет собой куб $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. Внутри куба задана начальная температура $T = 1$, на его границе поддерживается температура $T = 0$. Аналитическое решение задачи:

$$T(x,y,z,t) = f(x,t)f(y,t)f(z,t),\ f(x,t) = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp\left(-\pi^2(2k+1)^2 t\right)}{\pi(2k+1)}\sin\left(\pi(2k+1)x\right) \quad (9)$$

Задача считалась на шестигранной сетке с шагом по времени 0.0005. Сетка содержала 20 ячеек по каждому направлению. На рисунке 12 представлено сравнение аналитического и численного решений задачи на момент $t = 0.05$ мкс. Для сравнения аналитического и численного решения на график наносились точки с координатами $\left(T_a^i, T_c^i\right)$ для всех ячеек i, где T_a^i, T_c^i - аналитическое и численное значения температуры в i-ой ячейке. Сравнение результатов численного и аналитического решений показывают удовлетворительную точность расчётов.

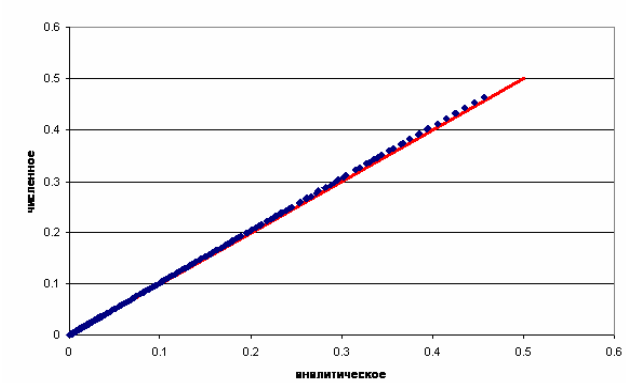


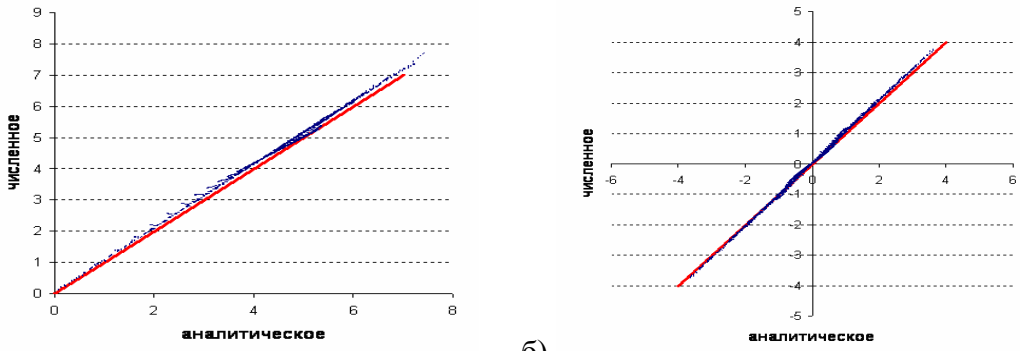
Рисунок 12 – Сравнение аналитического и численного решений на $t = 0.05$

Задача о сферическом поршне в магнитном поле диполя

Геометрия задачи – сферическая полость, в которой внутренняя сфера с начальным радиусом R_0 расширяется с постоянной скоростью u_R. Внутри области задано магнитное поле диполя с осью, направленной вдоль оси x и радиусом R_0:

$$H_x = H_0\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\left(\frac{x}{R}\right)^2\right), \qquad H_r = -H_0\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\left(\frac{rx}{R^2}\right), \qquad (10)$$

где $r^2 = y^2+z^2$, $R^2 = x^2+y^2+z^2$. При условии $H_0 \gg u_R$ (сильное магнитное поле) приближенное аналитическое решение задачи – это магнитное поле диполя с радиусом $R_0(t) = R_0 + u_R t$. Для расчётов использовалась сетка, полученная вращением вокруг оси OX двумерной сетки. По радиальному направлению двумерная сетка имела 40 ячеек, по угловому – 80 ячеек. Трехмерная сетка состояла из 40 «слоев». Радиус внутренней сферы R_0 равен 0,5, радиус внешней сферы 3. Скорость поршня $u_R = 0.1$, величина магнитного поля $H_0 = 5$. В качестве среды взят идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma = 2$ и начальной плотностью $\rho_0 = 1$. Расчёт проводился по методике ТИМ. Для сравнения аналитического и численного решений применялся следующий способ. Для каждой ячейки i рассмотрим аналитическое $H_i^{ан}$ и численное $H_i^{ч}$ значение компоненты вектора напряженности магнитного поля. На рисунке 13 изображены точки с координатами $\left(H_i^{ан}, H_i^{ч}\right)$ для всех счетных ячеек i и показано их расположение относительно прямой $y=x$. Сравнение результатов численного и аналитического решений показывают удовлетворительную точность расчётов.



а) б)

Рисунок 13 – Значения H_x - а) и H_r - б) на момент времени $t = 0.31$ мкс

Заключение

В данном обзоре представлены три методики, разработанные во ВНИИЭФ для расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных сетках. Их разработке послужил большой практический опыт, накопленный во ВНИИЭФ при использовании лагранжевой методики ДМК и свободно лагранжевой методики МЕДУЗА для расчёта двумерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многоугольных сетках. Практический

интерес к использованию неструктурированных сеток особенно проявляется при решении задач со сложными геометриями, имеющих локальные мелкомасштабные подобласти, в которых применение многоугольных и многогранных ячеек позволяет строить сетку более эффективным образом с заданными свойствами. Представленные результаты расчётов модельных задач на многогранных неструктурированных лагранжевых сетках подтвердили их работоспособность.

Список использованных источников

Софронов И.Д. О численном решении уравнения теплопроводности на неортогональной сетке. // Тезисы научных сообщений 1 Международного конгресса математиков. Секция 14, Москва, 1966

Sofronov I.D., Rasskazova V.V., Nesterenko L.V. The use of nonregular nest for solving two-dimension nonstationary problems in gas dynamics // Numerical Methods in Fluid Dynamics. M.: Mir Publishers, 1984. P. 82-121.

Рассказова В.В., Софронов И.Д. Некоторые вопросы численного решения трехмерных задач механики сплошной среды // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1987. Вып. 1. С. 44-57.

Рассказова В.В., Софронов И.Д., Еременко А.Ю., Мотлохов В.Н. Методика решения задач трехмерной нестационарной газовой динамики на нерегулярных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. Вып.4. 1998. С.44-57.

Бутнев О.И., Барабанов Р.А., Волков С.Г., Жогов Б.М., Пронин В.А. Программа МЕДУЗА-3Д расчёта трёхмерных задач газодинамики на нерегулярных сетках. Расчёты неустойчивости Рихмайера-Мешкова. // Молодёжь в науке. Сборник докладов II научной конференции. Саров. 2003. С.13-18.

Соколов С.С. Методика решения нестационарных упругопластических задач на нерегулярных многогранных лагранжевых сетках //Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып.4. С.23-36.

Соколов С.С. Метод расчёта двумерных нестационарных упругопластических течений на нерегулярных многоугольных лагранжевых сетках //Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып.4. С.62-80.

Панов А.И. Методика решения уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках //Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып.4. С.27-40.

Соколов С.С., *Панов А.И., Мотлохов В.Н., Воропинов А.А., Новиков И.Г., Соболев И.В., Ялозо А.В.* Методика ТИМ расчёта трёхмерных течений на нерегулярных многогранных лагранжевых сетках с произвольным количеством связей в узлах //Тезисы докладов Международного семинара – Супервычисления и математическое моделирование. Саров, 2004.