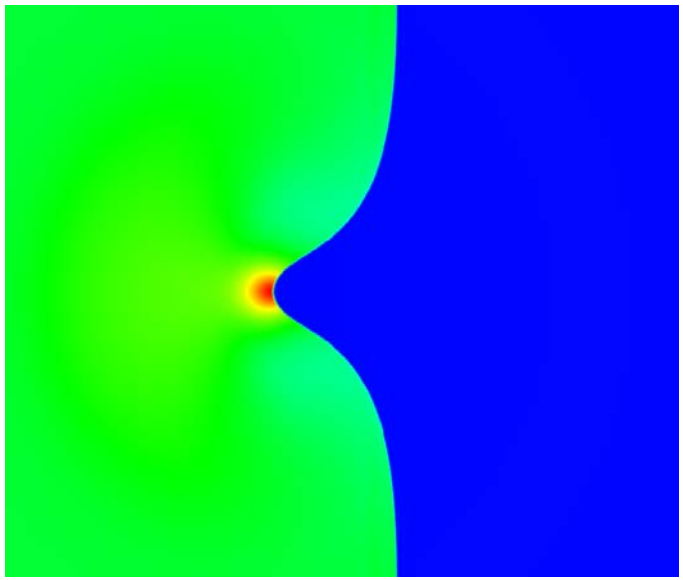
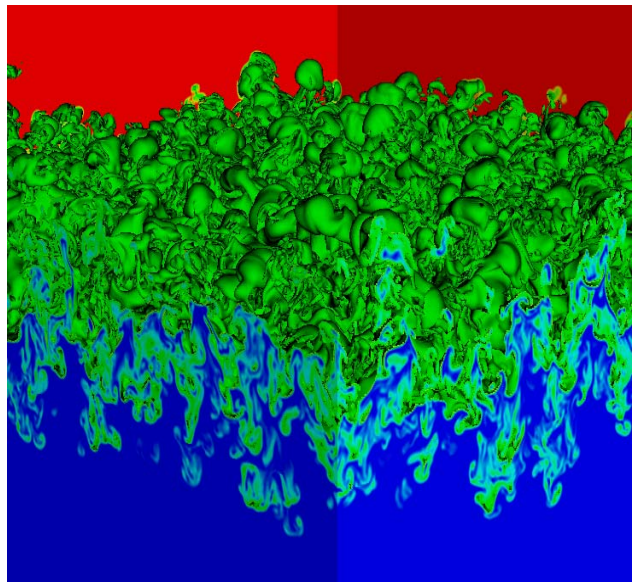
Сопоставление современных методов гидродинамики ударных волн



Вена

20-23 июня 2005 г.



Эндрю У. Кук (Andrew W. Cook)

Ливерморская национальная лаборатория им. Лоуренса

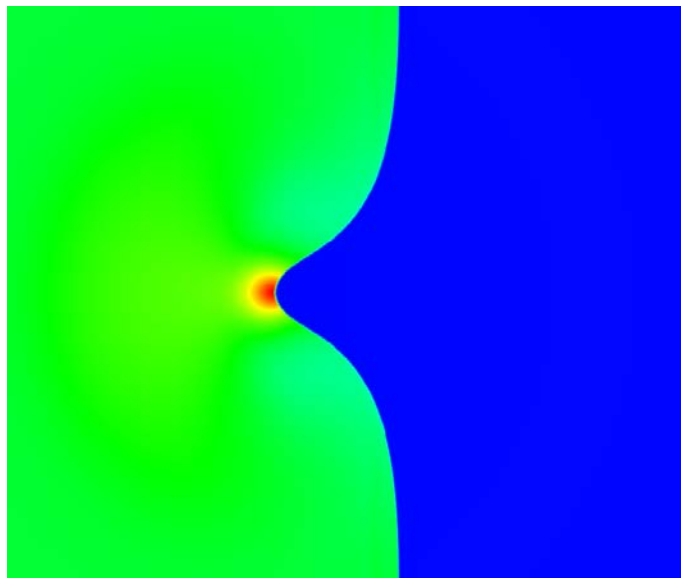
Соавторы: Билл Кэбот (Bill Cabot) и Джефф Грино (Jeff Greenough)

Данная работа выполнена при поддержке Министерства энергетики США Ливерморской национальной лабораторией им. Лоуренса Университета штата Калифорния по контракту № W-7405-Eng-48.

UCRL-PRES-212390

Для расчета ударных волн могут использоваться методы высших порядков

- Спектральная схема и квазинепрерывная схема 10-го порядка для производных по пространственным координатам
- Схема Рунге-Кутта 4-го порядка для шага по времени
- Искусственная вязкость переменного порядка
- Фильтр 8-го порядка для компенсации погрешностей дискретизации



Ударная волна на цилиндре гексафторида серы (SF_6) при числе Маха 10

Каковы преимущества?

Уравнения крупных вихрей для многокомпонентной жидкости могут быть записаны в форме Навье-Стокса.

$$\dot{\rho}_\alpha + \nabla \cdot \left(\rho_\alpha \boldsymbol{u} - \boldsymbol{J}_\alpha\right) = 0$$ **(уравнение неразрывности компонента смеси)**

$$\dot{\boldsymbol{m}} + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{m}\boldsymbol{u} + p\overleftrightarrow{\delta} - \overleftrightarrow{\tau}\right) = \rho \boldsymbol{g}$$ **(уравнение импульса смеси)**

$$\dot{E} + \nabla \cdot \left[E\boldsymbol{u} + \left(p\overleftrightarrow{\delta} - \overleftrightarrow{\tau}\right) \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{q}\right] = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{g}$$ **(уравнение энергии смеси)**

$$p = \rho(Y_\alpha H_\alpha - e), \quad H_\alpha = \int_{T_0}^{T} c_{p,\alpha}(T')dT'$$ **(уравнение состояния смеси)**

$$\boldsymbol{J}_\alpha = \rho D_\alpha \nabla Y_\alpha - Y_\alpha \sum_{\alpha=1}^{N} \rho D_\alpha \nabla Y_\alpha$$ **(диффузионный поток вещества)**

$$\overleftrightarrow{\tau} = \mu\left[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\right] + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\overleftrightarrow{\delta}$$ **(вязкое напряжение)**

$$\boldsymbol{q} = k\nabla T$$ **(тепловой поток за счет теплопроводности)**

Метод решения: квазинепрерывные производные 10-го порядка
схема Рунге-Кутта 4-го порядка для шага по времени

Гипервязкость обрезает компоненты с высокими волновыми числами

$$\mu = \mu_0 + C_\mu \overline{\rho \left| \nabla^r S \right| \Delta^{(r+2)}}, \quad \mathrm{r} = 2,4,6...$$

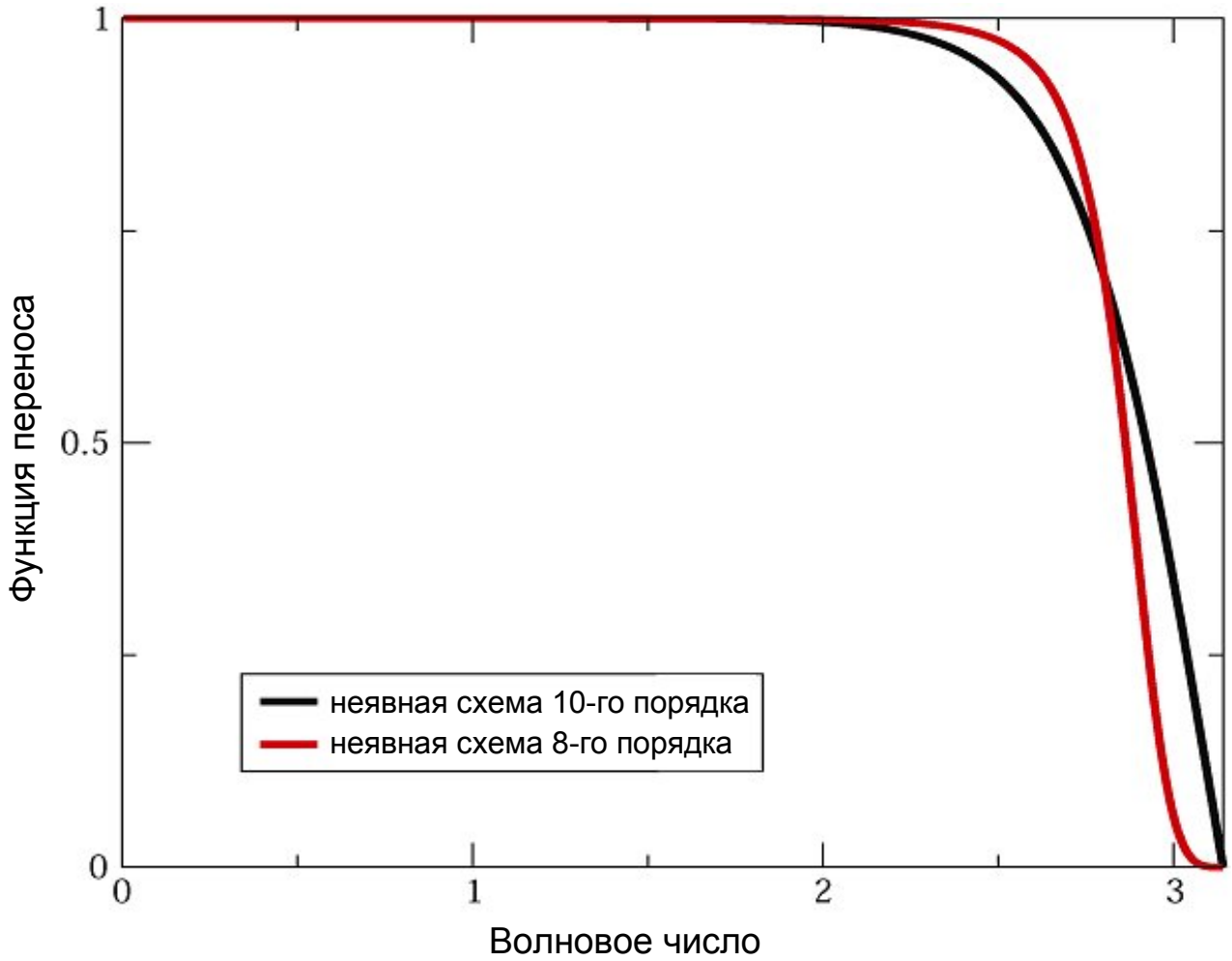
$$\beta = \beta_0 + C_\beta \overline{\rho \left| \nabla^r S \right| \Delta^{(r+2)}}, \quad \mathrm{r} = 2,4,6...$$

$$S = \left(\overleftrightarrow{S} : \overleftrightarrow{S} \right)^{1/2}, \quad \overleftrightarrow{S} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \nabla \right)$$

$$\overline{(\ )} = \text{Гауссов фильтр шириной } 4\Delta$$

Для увеличения порядка точности следует увеличить r.

Фильтр для компенсации погрешностей дискретизации применяется к консервативным переменным после каждого подшага по схеме Рунге-Кутта



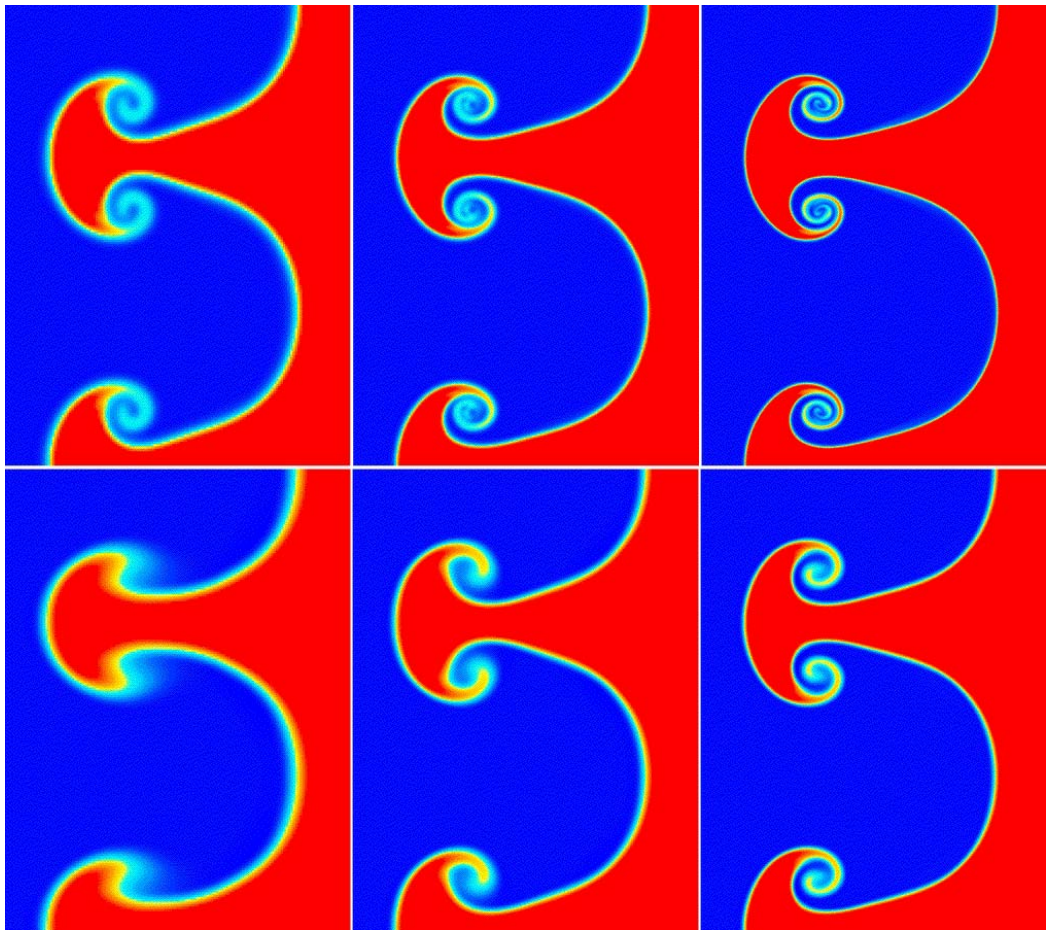
Фильтр для компенсации погрешностей дискретизации сохраняет функции с точностью до 8-го порядка.

Спектральные/квазинепрерывные методы позволяют рассчитать мелкомасштабные особенности неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

128 точек на длину волны | 256 точек на длину волны | 512 точек на длину волны

Спектральный метод

Метод CENO



M=1,2

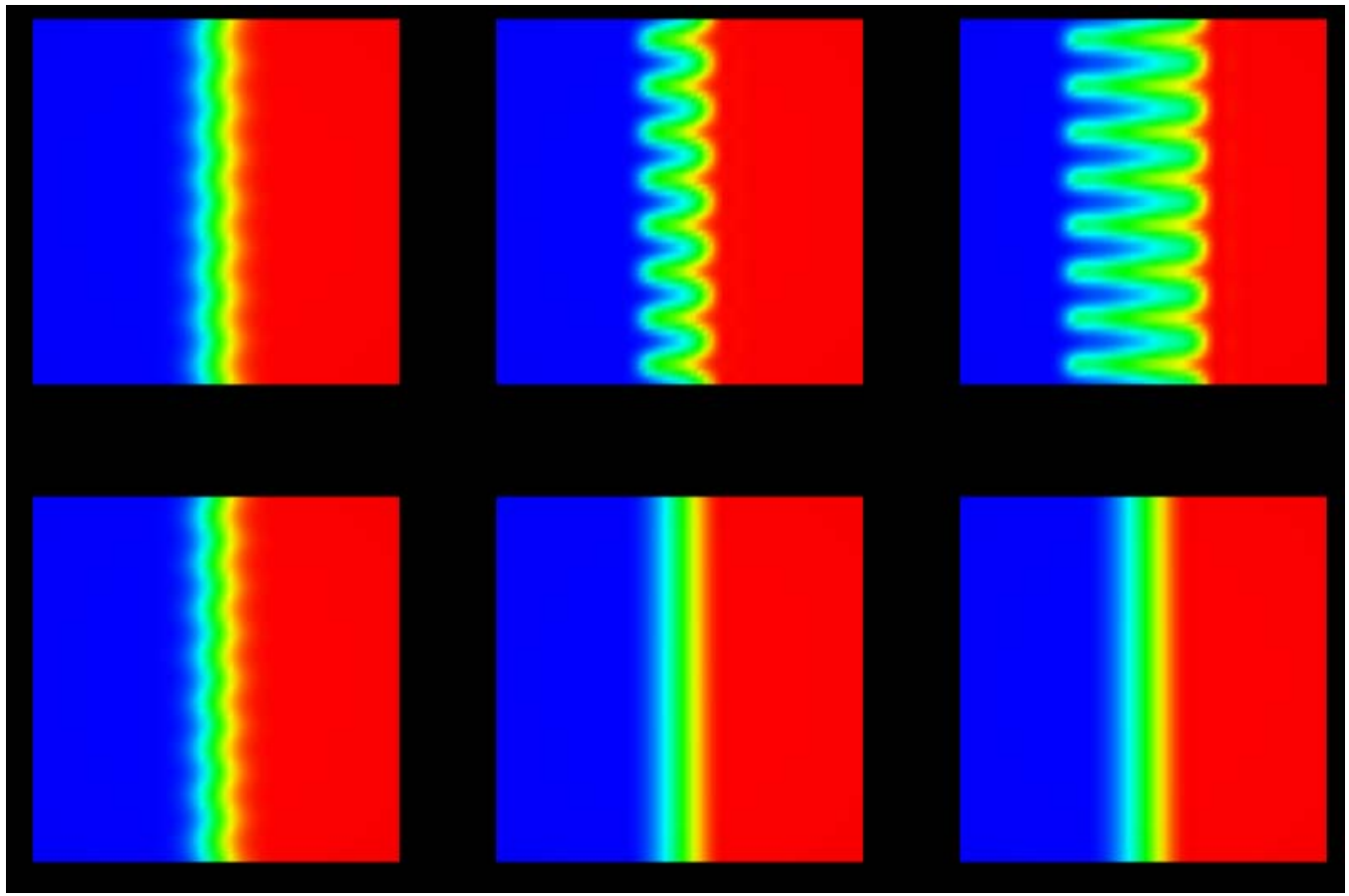
Расчеты для эксперимента Коллинса-Джейкобса (Collins-Jacobs) с воздухом и SF_6

Диффузионные схемы могут быть подвержены неустойчивости Рэлея-Тэйлора с крайне мелкомасштабными возмущениями.

t=0 t=1 t=2

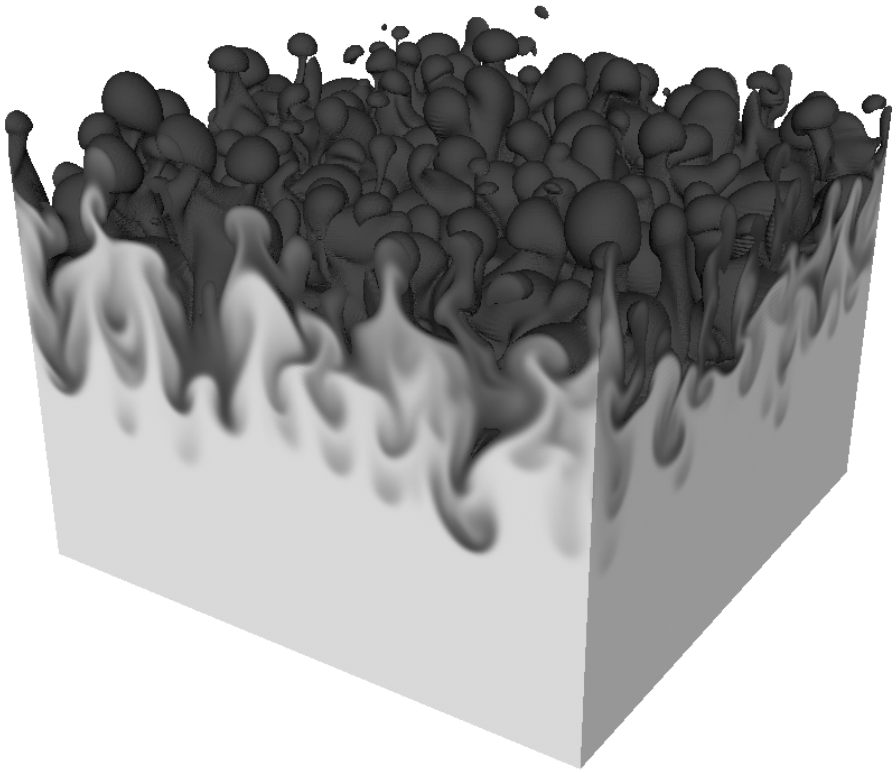
Спектральный метод

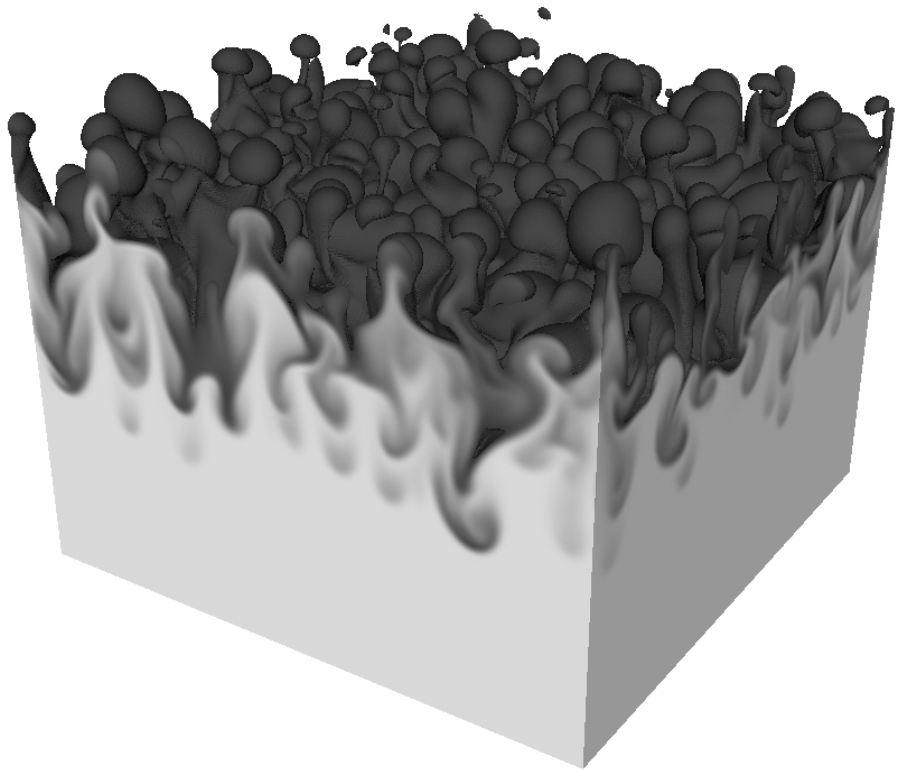
Метод CENO



Неявная численная диссипация подавляет неустойчивости (8 точек на длину волны).

Гипервязкость не действует до тех пор, пока степень разрешения для потока достаточна.

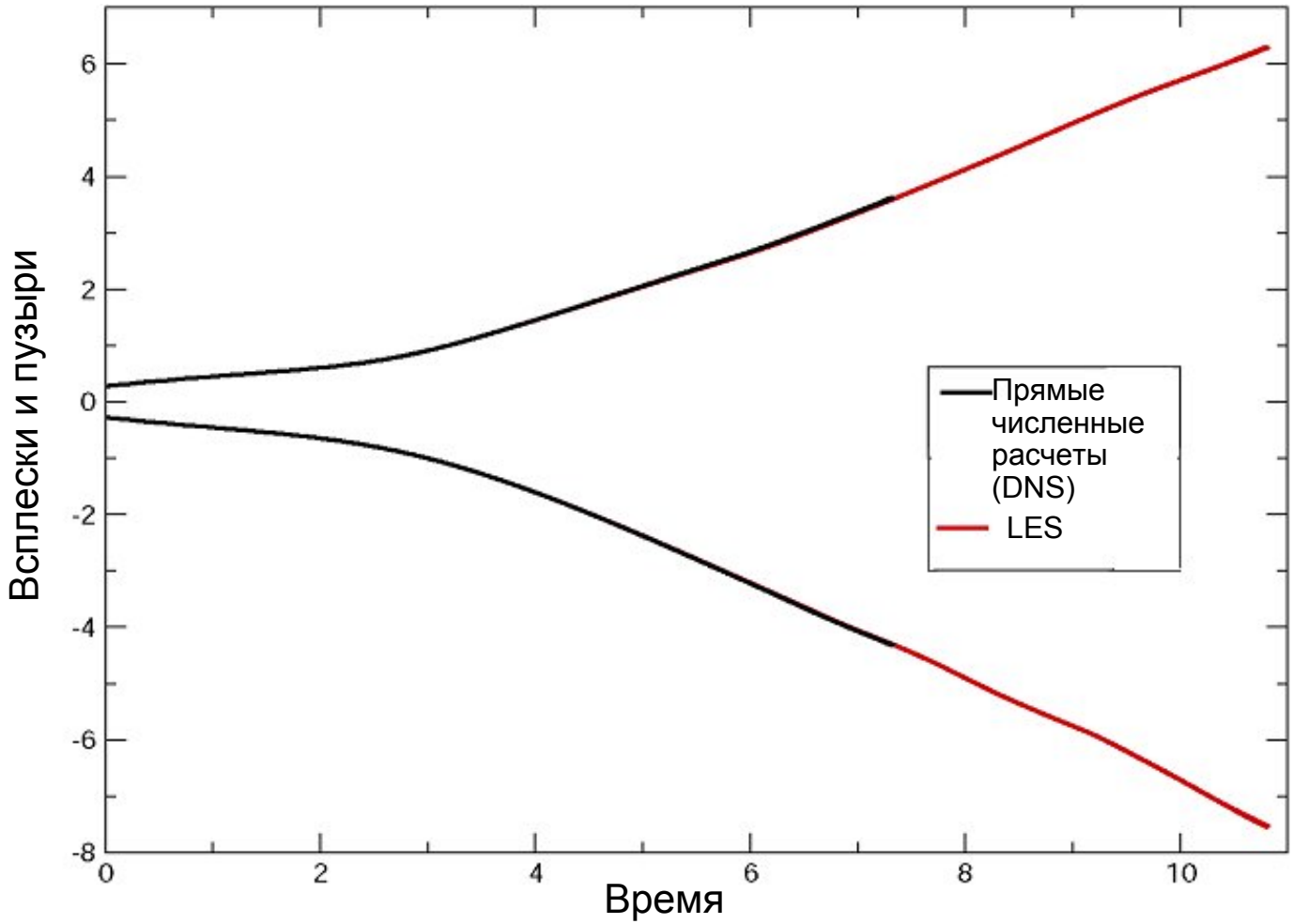




Прямой численный расчет (DNS) **Расчет методом крупных вихрей (LES)**

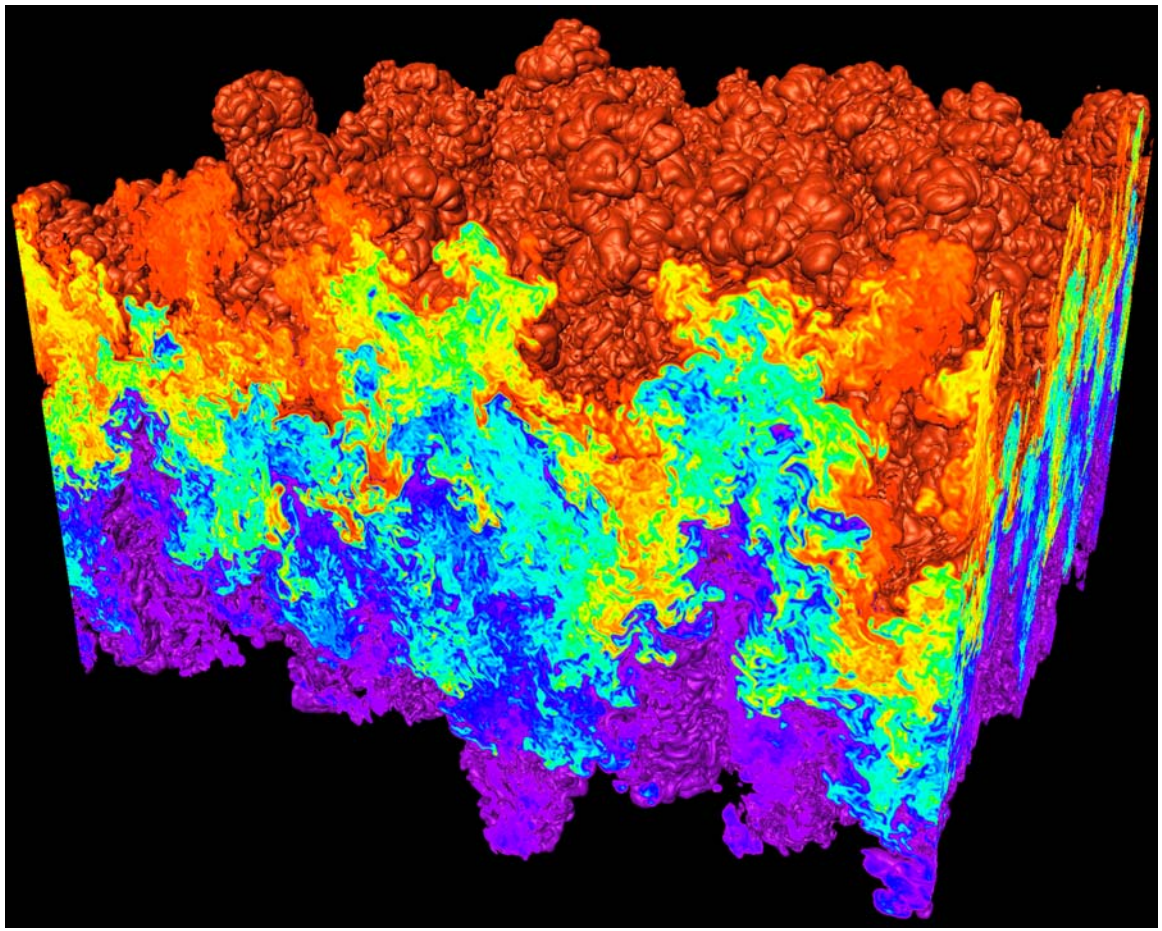
При малых числах Рейнольдса результаты расчетов по методу LES стремятся к результатам прямых численных расчетов.

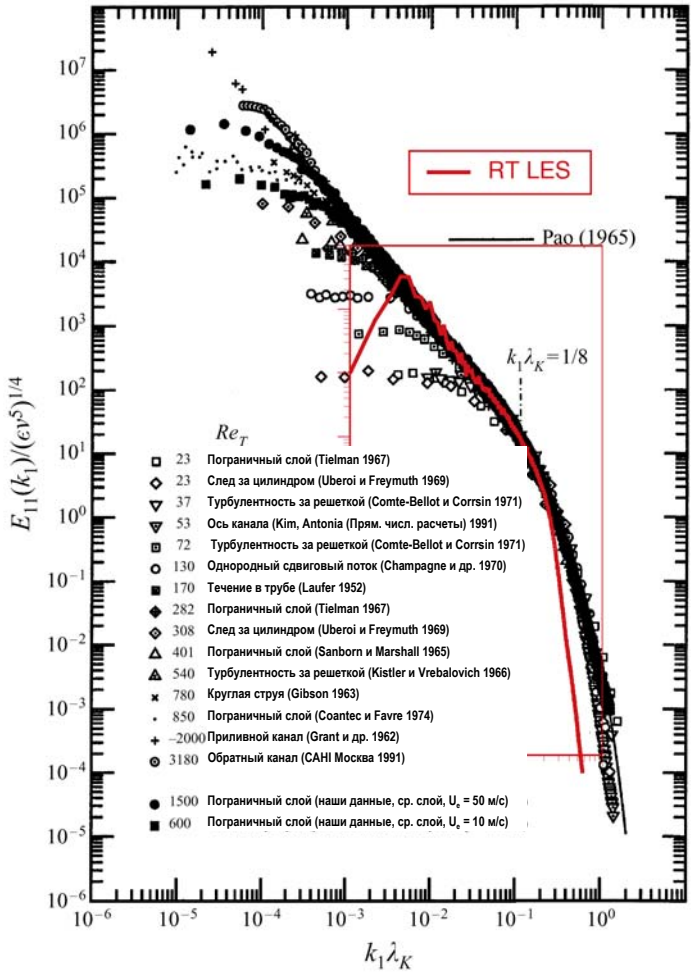
Расчеты по методу LES продолжаются после того, как степень разрешения прямых численных методов становится недостаточна.



Метод LES распространяет результаты прямых численных расчетов на более высокие числа Рейнольдса.

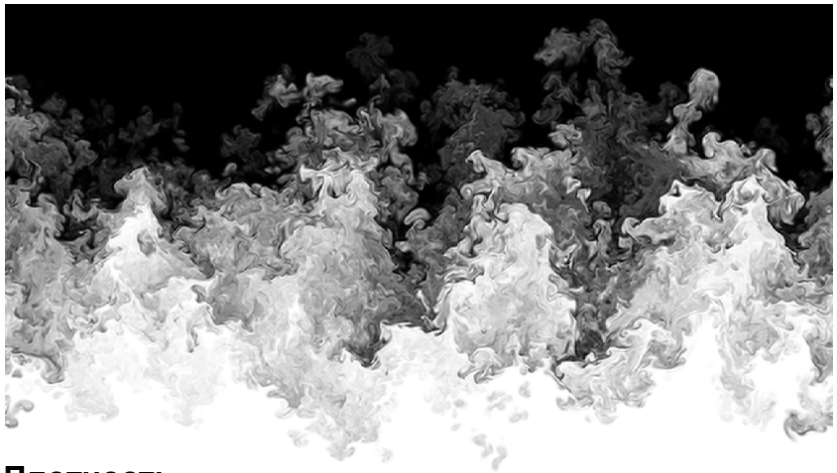
Гипервязкость отсекает высокие волновые числа



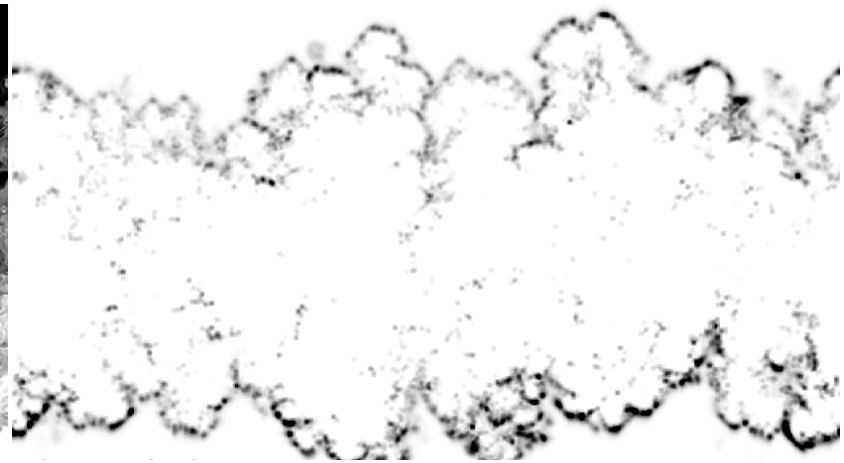


Конечное число Рейнольдса > 20000

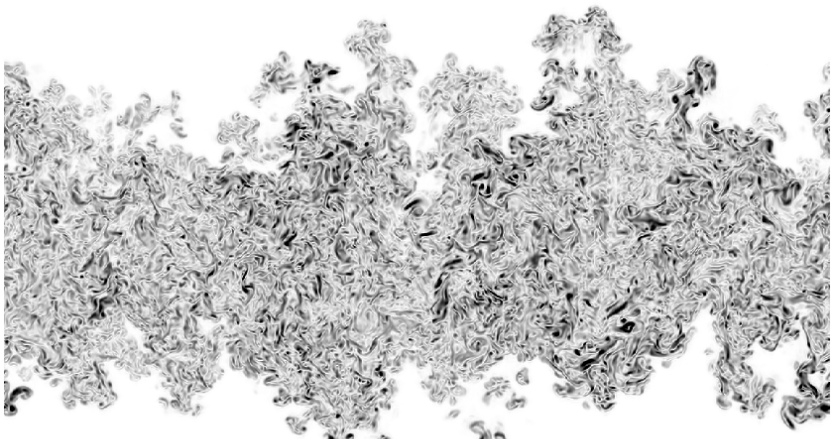
Модели подсеточного масштаба снижают Гиббсовские колебания



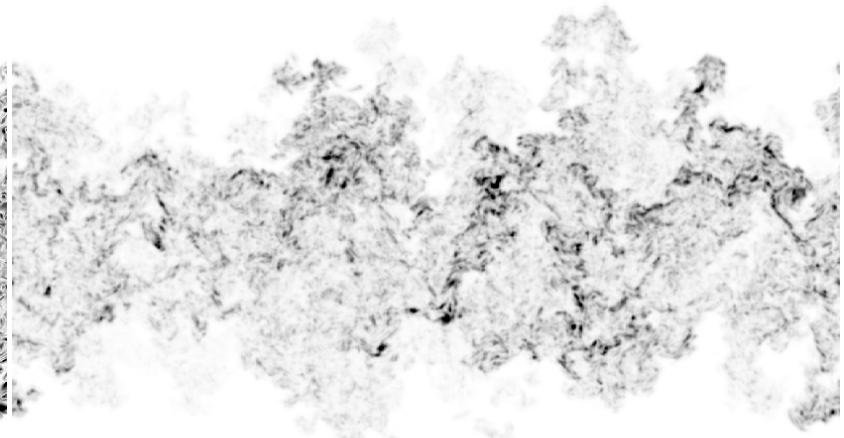
Плотность



Коэффициент диффузии



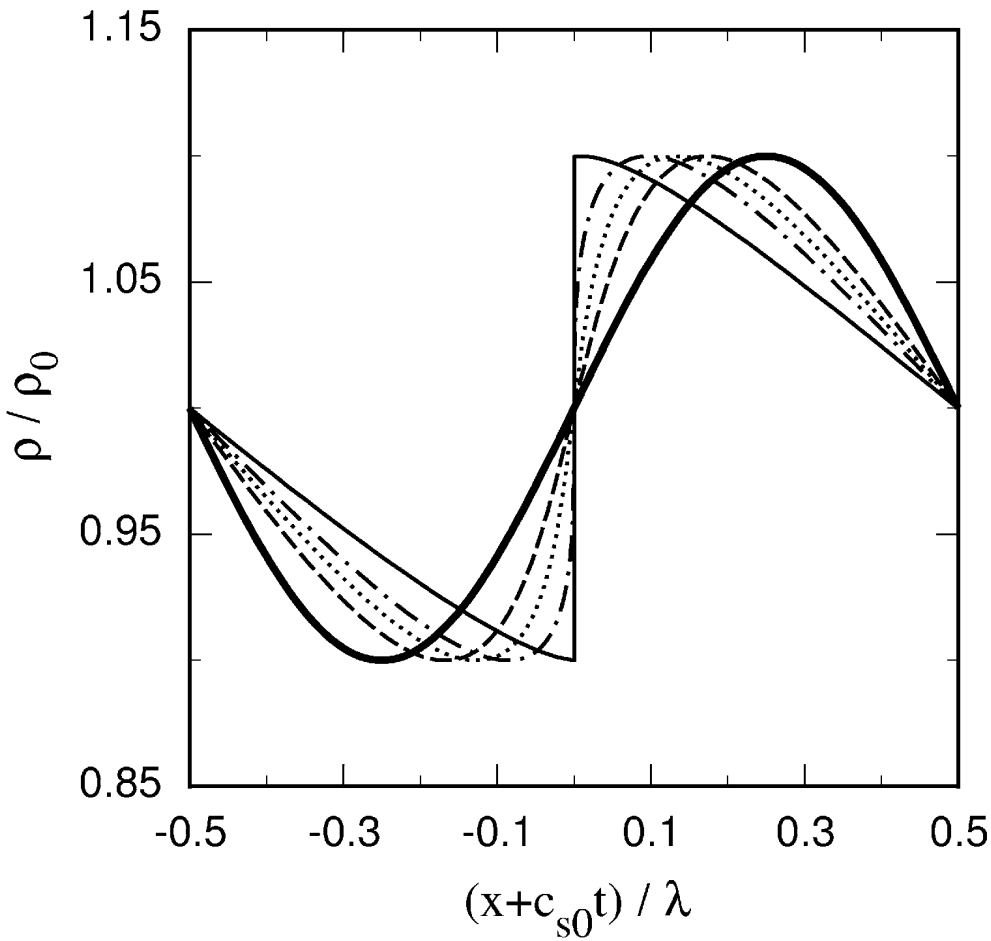
Завихренность



Вязкость

Вязкость и коэффициент диффузии действуют по-разному в подсеточном масштабе.

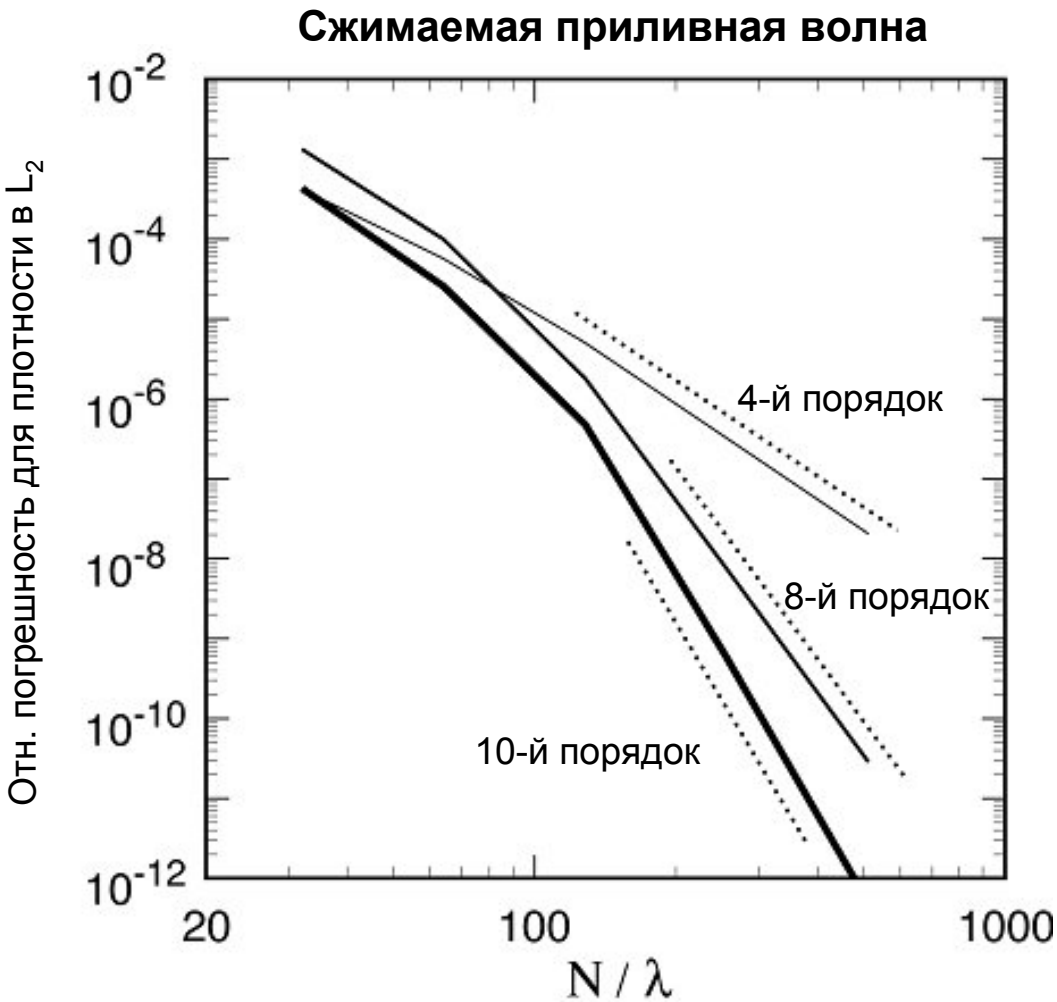
Численная проверка программы проводится на примере сжимаемой приливной волны



1) Синусоидальные начальные условия.
2) Крутизна синусоидальной волны возрастает, и после прохождения нескольких периодов формируется ударная волна.
3) Решение показано в движущейся системе координат.

Имеется точное решение до момента формирования ударной волны при $t=t_b$.

Скорости сходимости зависят от порядка точности моделей подсеточного масштаба



1. Синусоидальные начальные условия.
2. Крутизна синусоидальной волны возрастает, и после прохождения нескольких периодов формируется ударная волна.
3. Погрешности показаны непосредственно перед формированием ударной волны.

1. При высоких значениях числа Куранта, Фридрикса, Леви (CFL) сходимость определяется схемой, принятой для шага по времени.
2. При малых значениях числа CFL сходимость определяется наименьшим из следующего:
   a. Параметр r модели для подсеточного масштаба
   b. Порядок пространственной разностной схемы

По мере развития потока спектр расширяется.

Ошибки квазинепрерывной схемы малы для гладкого потока

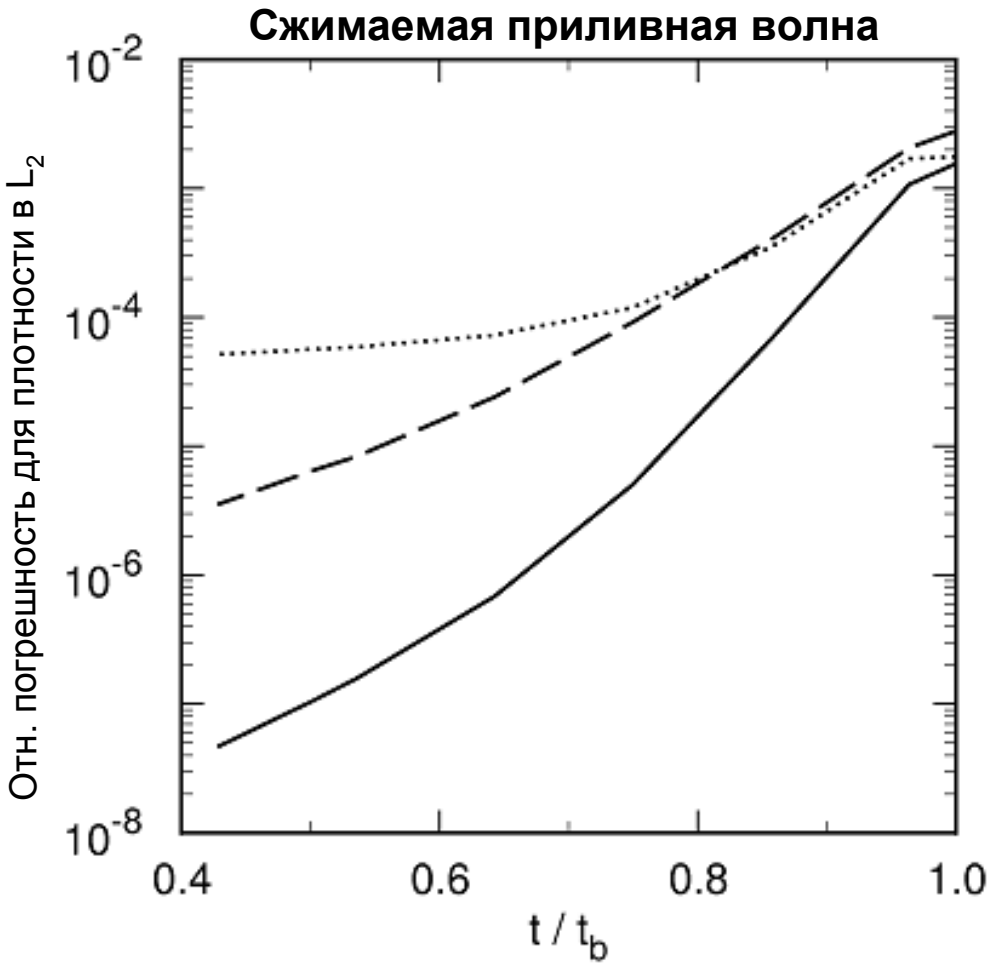


Схема PLMDE-MILES

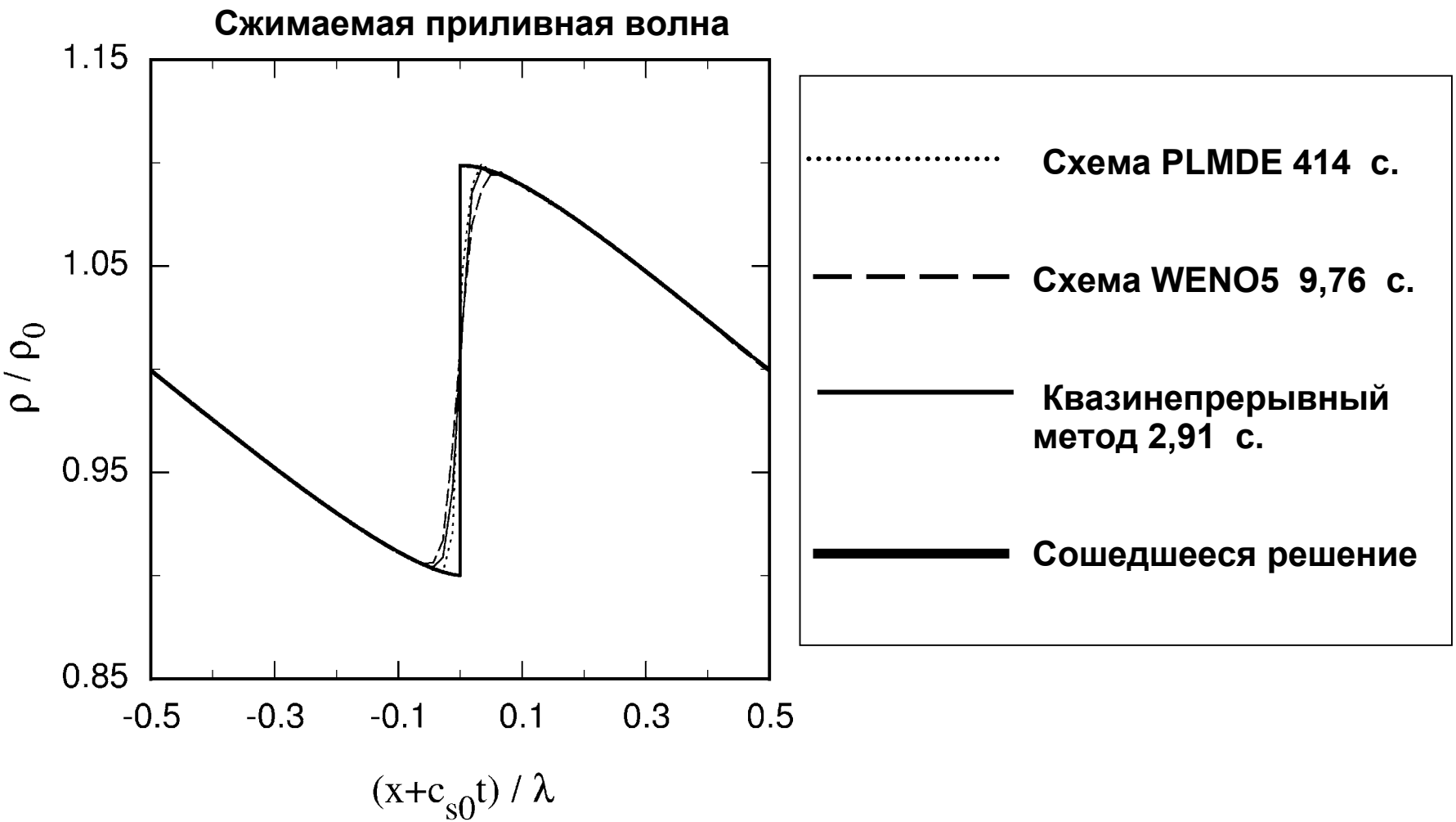
Схема WENO5-MILES

Квазинепрерывная схема - LES

**MILES – монотонный интегральный метод крупных вихрей*

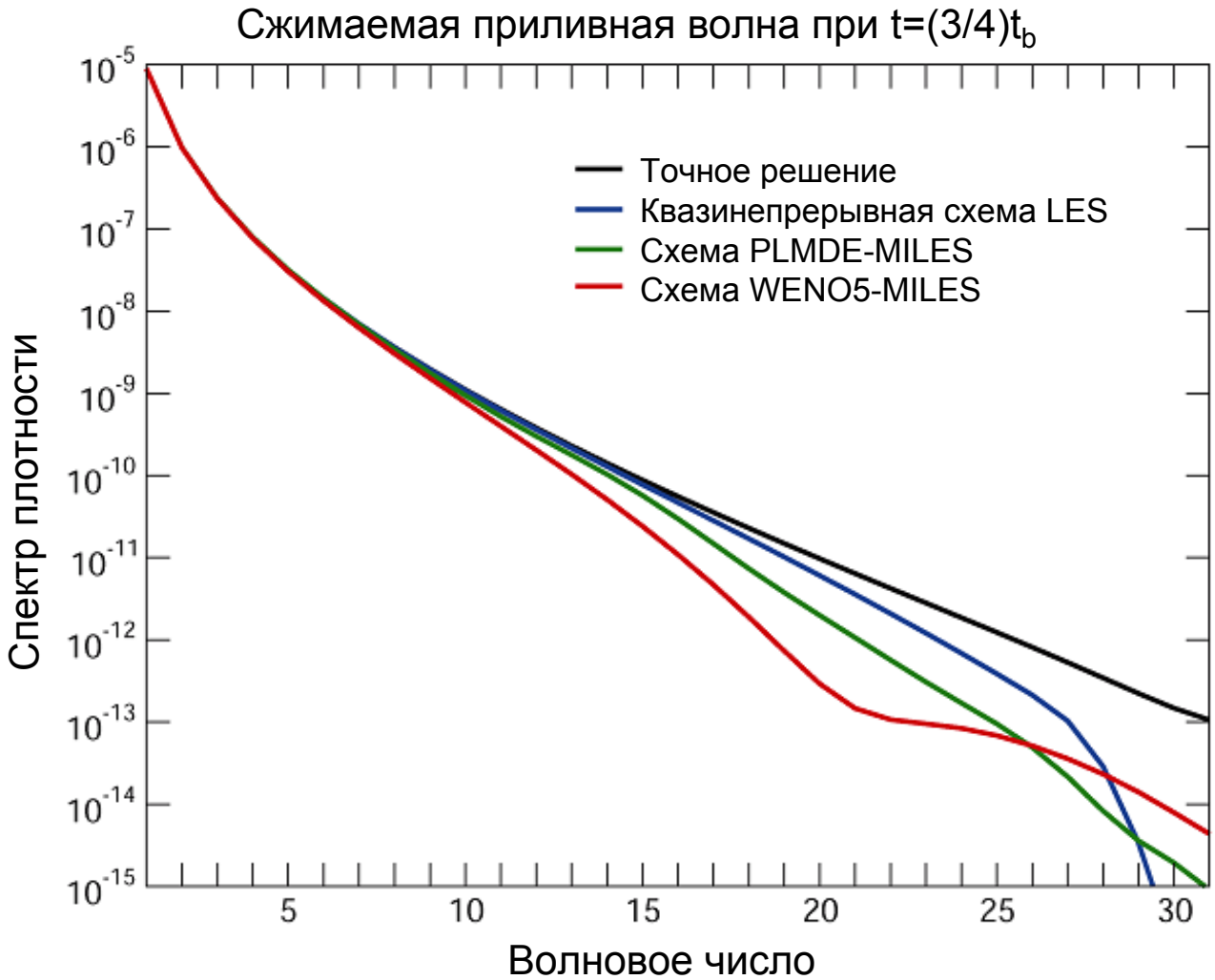
Погрешности, возникающие при больших значениях времени, обусловлены толщиной фронта ударной волны.

Ударные волны могут рассчитываться спектральными и квазинепрерывными методами



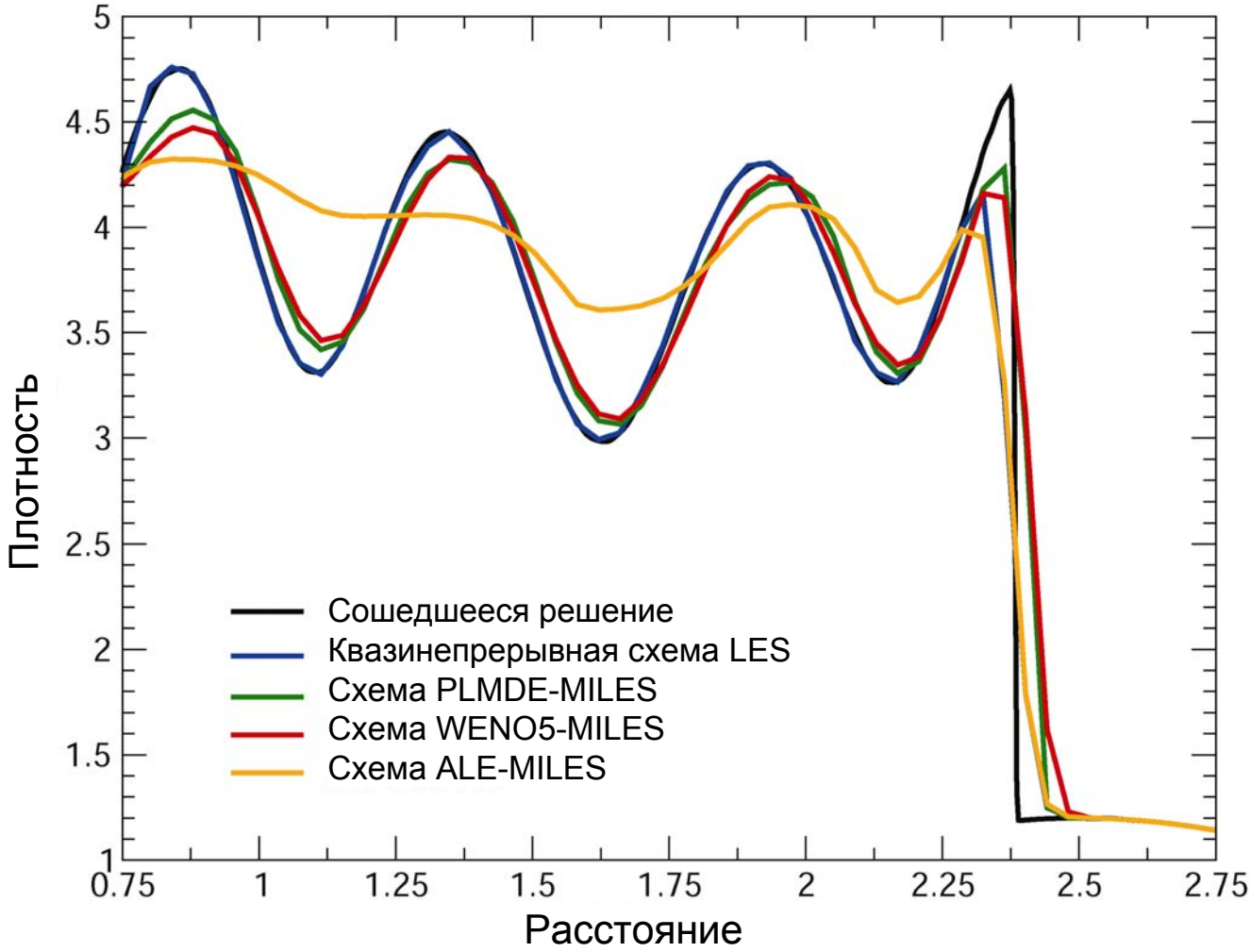
3 точки в ударной волне

Спектральные и квазинепрерывные методы превосходно представляют составляющие с высокими волновыми числами



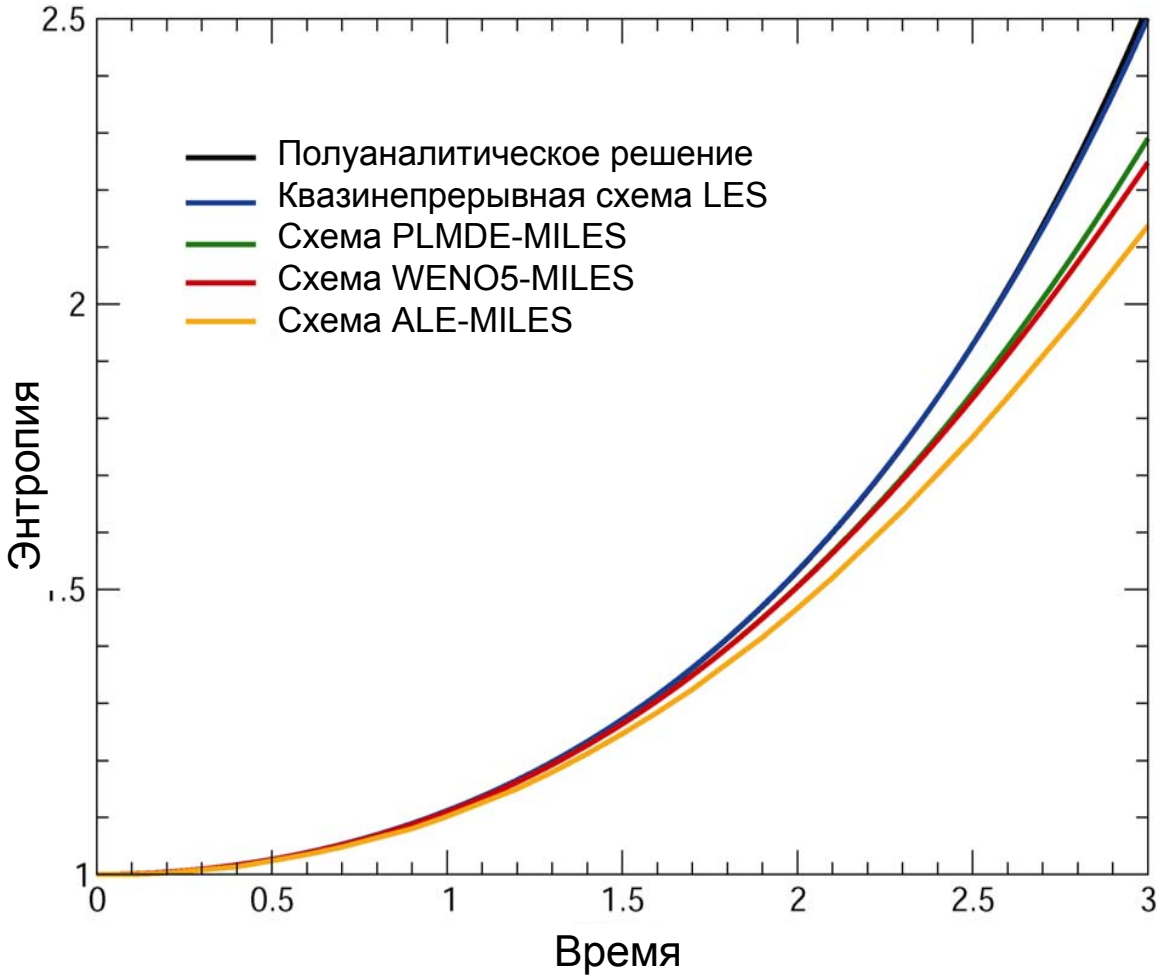
Может ли модель обратной свертки исправить спектр в схеме WENO?

Квазинепрерывные методы быстро сходятся для задачи Шу (Shu).



Неявная вязкость в алгоритмах MILES вызывает смещение по фазе

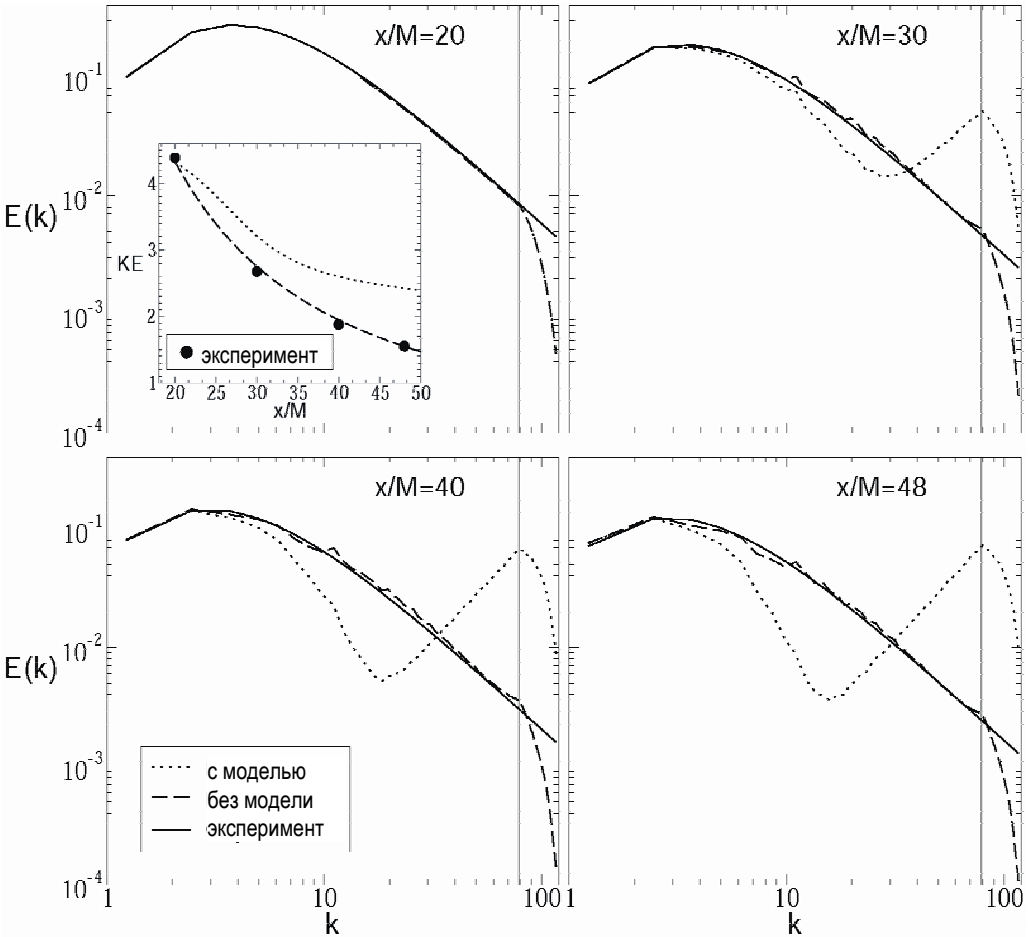
Спектральные и квазинепрерывные методы дают замечательные результаты для вихря Тэйлора-Грина



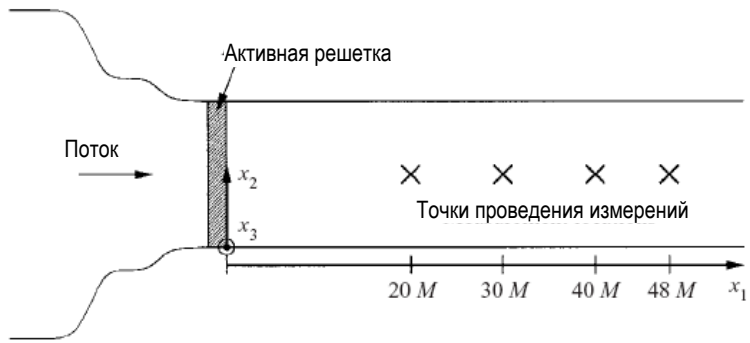
1. Энергия первоначально заключена в составляющей с наименьшим волновым числом.
2. Вихрь растягивается и сгибается.
3. Завихренность концентрируется в малых масштабах.
4. Энергия передается каскадным механизмом к составляющим с более высокими волновыми числами.

Расчеты вверх по потоку и ограничения потока искажают составляющие с высокими волновыми числами.

Спектральные методы с гипервязкостью хорошо описывают затухающую турбулентность.



- спектральный метод крупных вихрей, 192^3
- k > 64 отсекаются
- соответствует спектру при x/M=20
- периодические граничные условия
- r = 2
- $C_\mu^r = 0.025$



Эмпирические коэффициенты подбираются таким образом, чтобы описать спектр энергии в эксперименте Кэнга и др. (Kang et al.) для турбулентности решетки

Выводы

1. Применение усеченных уравнений Навье-Стокса (TNS) представляет собой полезный подход для метода крупных вихрей (LES).
2. Спектральные и квазинепрерывные методы в сочетании со спектроподобной полной (линейной и объемной) вязкостью могут описывать ударные волны.
3. Модели подсеточного масштаба, основанные на подавлении составляющих с высокими волновыми числами, сохраняют скорости сходимости численных методов более высокого порядка.
4. Модели подсеточного масштаба для высоких волновых чисел позволяют расширить инерциальный диапазон, сводя к минимуму размер диапазона диссипации.
5. Квазинепрерывный метод крупных вихрей дает более высокое разрешение для турбулентных потоков, чем методы MILES.

Методы крупных вихрей более высокого порядка могут успешно применяться в тех случаях, когда монотонные интегральные методы крупных вихрей (MILES) более низкого порядка не работают.