Точность по временной переменной решения уравнений диффузии неравновесного излучения

Винсент А. Муссо, Рик М. Рауензах и Дана А. Кнол

Настоящая работа выполнена в Лос-Аламосской национальной лаборатории под эгидой Национальной администрации по ядерной безопасности Министерства энергетики США по контракту № W-7405-ENG-36

LA-UR-05-3829

Как связаться с авторами

- Поскольку многие статьи, на которые авторы ссылаются в данной работе, пока не опубликованы, обращайтесь к авторам за интересующей вас статьёй. Мы вышлем её вам в виде файла в формате PDF.

Электронный адрес: vmss@lanl.gov

Основные разделы

- Введение
- Математическая модель
- Методы решения
- Тестовые проблемы
- Результаты
- Выводы

Введение

- В традиционных методах решения задач диффузии неравновесного излучения уравнения линеаризованы, оператор расщепляющийся, первый порядок точности по времени.
- Продолжаются исследования, цель которых – получение нелинейных решений уравнений с более высоким порядком точности по времени.
- Коль скоро нелинейные решения пока недоступны, можно думать, что линеаризованные и с расщеплением оператора алгоритмы второго порядка точности по времени могут оказаться лучше известных в настоящее время методов решения.

Математическая модель

$$(1) \quad \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \cdot \left(D_r \nabla E \right) = \sigma_p c \rho \left(\frac{4\sigma_b T^4}{c} - E \right)$$

$$(2) \quad \rho \frac{\partial E_m}{\partial t} - \nabla \cdot \left(D_m \nabla T \right) = -\sigma_p c \rho \left(\frac{4\sigma_b T^4}{c} - E \right)$$

$$(3) \quad D_r = \frac{c}{3\rho\sigma_R + \frac{|\nabla E|}{E}}$$

$$(4) \quad E_m = \frac{kT}{m_p} \left[\frac{3}{2}(1+\alpha) + \alpha\chi \right]$$

Методы решения

- **NK2** – 2го порядка, метод Ньютона-Крылова, никаких линеаризаций и никакого расщепления оператора.
- **SR** – 2го порядка, метод Стрэнга-Розенброка, линеаризован, и оператор расщеплён.
- **OS1** – 1го порядка, расщепление Олсона, линеаризован, и оператор расщеплён.
- **OS2** – 2го порядка, расщепление Олсона, линеаризован, и оператор расщёплён.

2го порядка, расщепление Олсона

$$(1)\qquad \rho\frac{E_m^* - E_m^n}{\Delta t/2} - \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(D_m^*\nabla T^*\right) - \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(D_m^n\nabla T^n\right) = 0$$

$$(2)\qquad \rho\frac{E_m^{\sim} - E_m^*}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma_p^{\sim}c\rho\left(\frac{4\sigma_b\left(T^{**}\right)^4_{lin}}{c} - E^{n+1}\right) + \frac{1}{2}\sigma_p^* c\rho\left(\frac{4\sigma_b\left(T^*\right)^4}{c} - E^n\right) = 0$$

$$(3)\qquad \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}\left\{\nabla\cdot\left(D_r^{n+1,**}\nabla E^{n+1}\right) + \sigma_p^{**}c\rho\left(\frac{4\sigma_b\left(T^{**}\right)^4_{lin}}{c} - E^{n+1}\right)\right\} - \frac{1}{2}\left\{\nabla\cdot\left(D_r^n\nabla E^n\right) + \sigma_p^n c\rho\left(\frac{4\sigma_b\left(T^n\right)^4}{c} - E^n\right)\right\} = 0$$

$$(4)\qquad \rho\frac{E_m^{n+1} - E_m^{**}}{\Delta t/2} - \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(D_m^{n+1}\nabla T^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(D_m^{**}\nabla T^{**}\right) = 0$$

Восемь тестовых проблем

Проблема безразмерная **Постоянная c_v**	**Проблема размерная** **Постоянная c_v**	**Проблема безразмерная** **Упрощённые ур-ния Саха**	**Проблема размерная** **Уравнения Саха**
Двумерный импульс энергии (blast)	Двумерная труба	Одномерная задача Маршака	Одномерная задача Маршака
Двумерная задача Маршака		Одномерный импульс энергии (blast)	Двумерный импульс энергии (blast)
			Двумерная задача Маршака

Контроль шага времени

$$\Delta t^{n+1} = \min\left\{1.05\Delta t^{n}, \eta_t \times \min_{i,j}\left[\tau_r^{n+1}(i,j), \tau_m^{n+1}(i,j)\right]\right\}$$

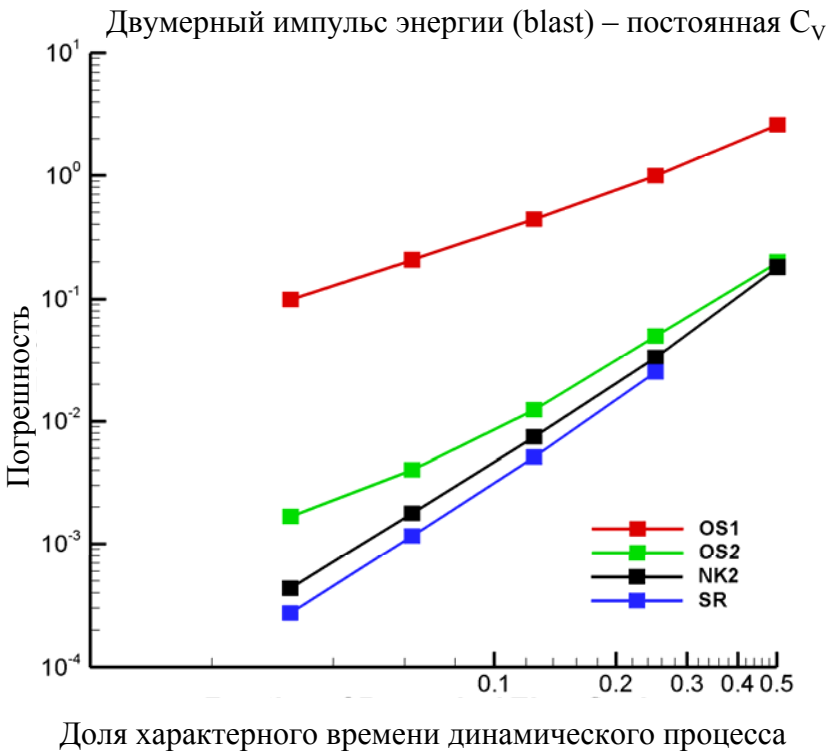
$$\tau_r^{n+1}(i,j) = \frac{1}{\left|\frac{1}{E_{i,j}^{n+1}}\frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^{n}}{\Delta t^{n}}\right|} \qquad \tau_m^{n+1}(i,j) = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_{i,j}^{n+1}}\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t^{n}}\right|}$$

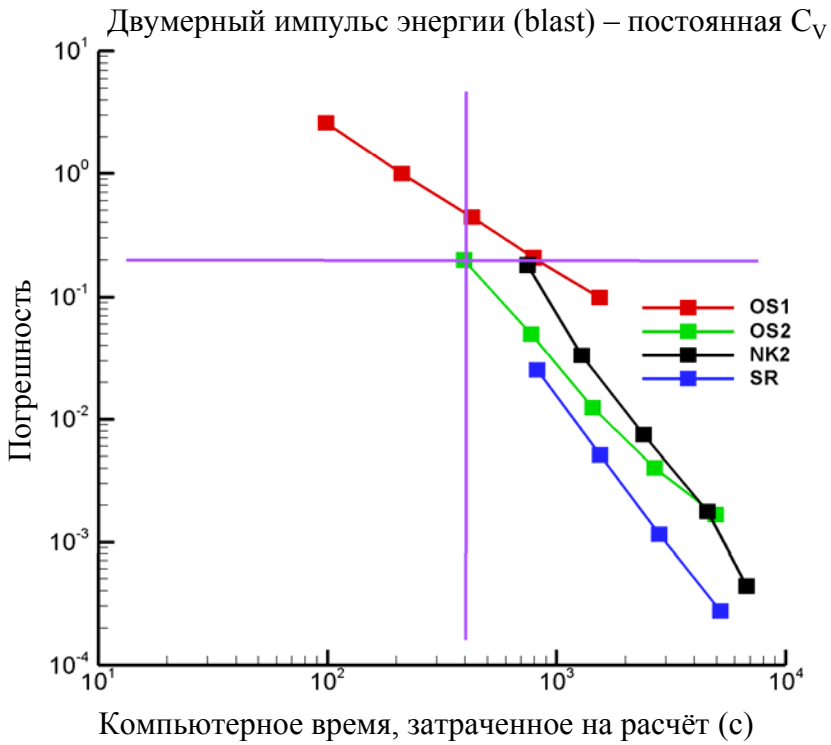
Точность

- Поскольку получить аналитическое решение тестовых проблем трудно, точность будет вычислена как L2-норма разности между «базовым» решением и результатом расчёта. «Базовое» решение получается вычислением с шагом по времени, в 10 раз меньшим наименьшего значения из тех, для которых анализируется точность.

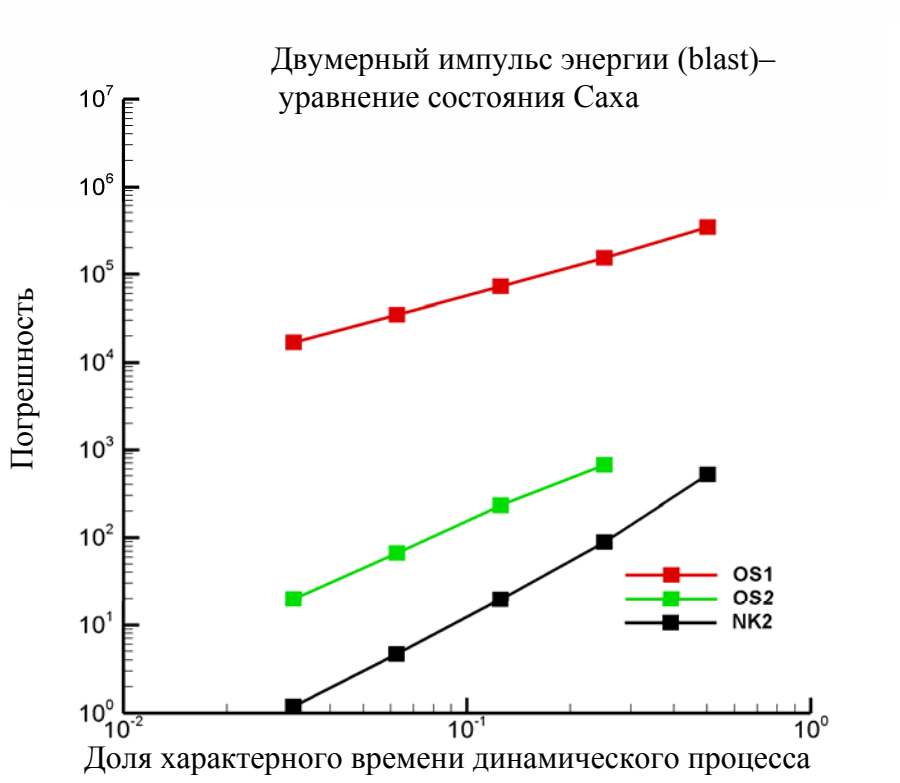
$$Error = \sqrt{\sum_{i=1}^{nx}\sum_{j=1}^{ny}\left[T_r(i,j) - T_r^{base}(i,j)\right]^2} \qquad T_r = \left[\frac{cE}{4\sigma_b}\right]^{\frac{1}{4}}$$

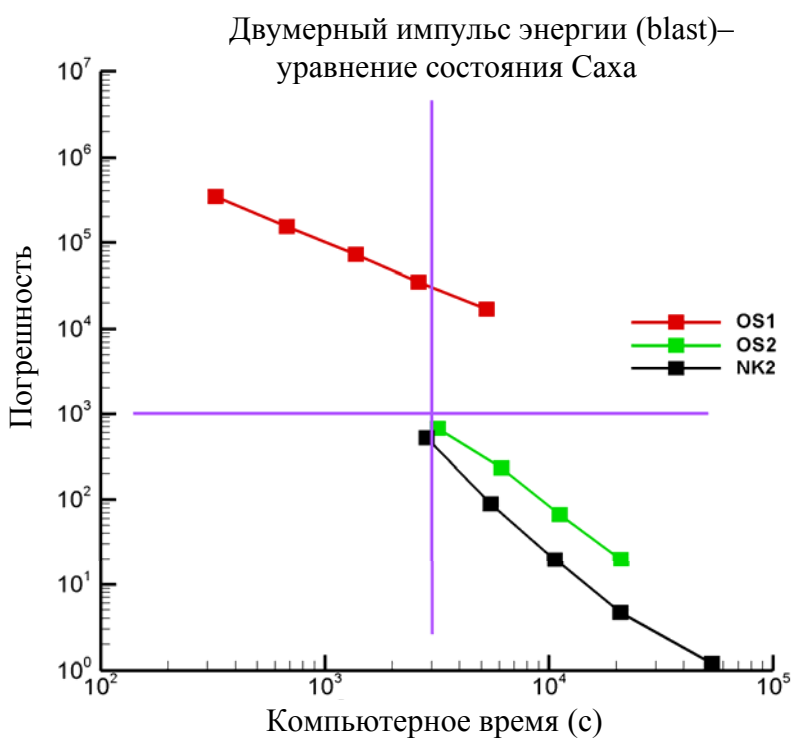
Результаты для безразмерной двумерной проблемы импульса энергии (blast) с постоянной c_v





Результаты для размерной двумерной проблемы импульса энергии (blast) с ионизацией Саха





Выводы

- Для диффузии неравновесного излучения можно построить 2го порядка, линеаризованные и с расщеплением оператора решения.
- Для малых погрешностей методы 2го порядка эффективнее традиционных методов 1го порядка.
- При использовании методов 2го порядка с расщеплением и линеаризацией возникают проблемы с устойчивостью, так что их нужно применять с осторожностью.
- Нелинейные методы 2го порядка дают высокую точность, они устойчивы и эффективны, но реализовать их может быть трудно.