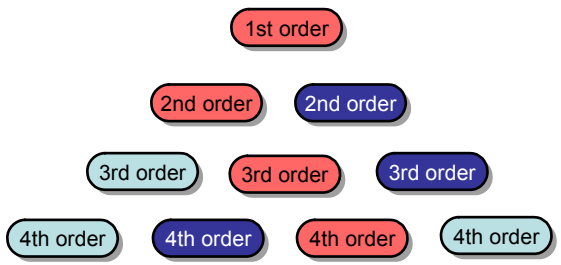
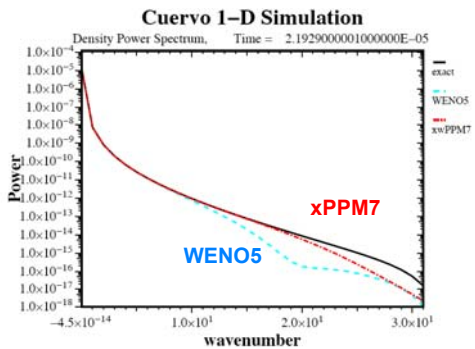
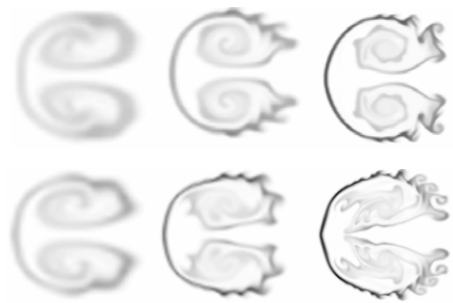
Подходы к разработке методов с улучшенным разрешением в эйлеровой гидродинамике







Уильям Райдер*, Джефф Гринау§ и Джим Камм*

*ЛАНЛ §ЛЛНЛ

Конференция пяти лабораторий
19-24 июня 2005 г.

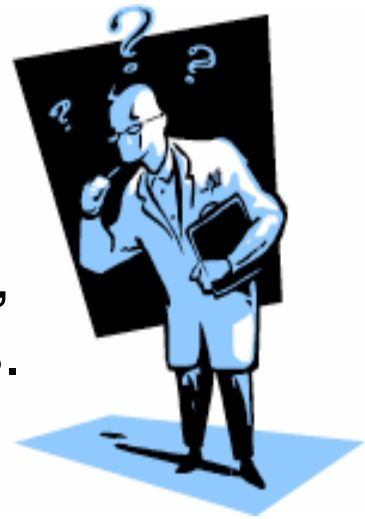
Вена, Австрия

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Вопрос: Как вы получаете максимум результатов, используя вашу разностную схему?

Предупреждение: *наша основная цель – расчёты нелинейных течений с разрывами непрерывности, гидродинамики ударных волн, турбулентности.*



- Цель состоит в том, чтобы получить наибольшую точность наименьшей ценой, не принося при этом в жертву надёжность.
- Полезно при этом заново исследовать структуру принципов, используемых в известных методах, а затем посмотреть, как получить от них наибольшую пользу.

Bill Rider
rider@lanl.gov

Разрывы непрерывности - особенные: слабые решения подчиняются некоторым важным требованиям*

- *Теорема Лакса-Вендроффа является одним из немногих строгих теоретических результатов, на которые можно положиться,*
  - Если схема представлена в консервативной форме, то решения сходятся к слабому решению (слабые решения не являются единственными!),
  - и при наличии достаточно сильной диссипации можно найти единственное решение.
- Однако без консервативности никакой гарантии этого не существует!

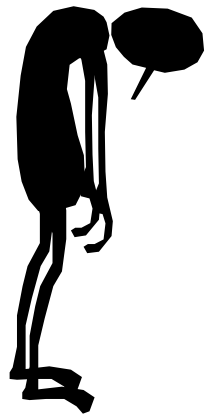
***Lax & Wendroff, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13, 1960.** См. также **R.J. Leveque,** Численные методы для законов сохранения

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Разрывы непрерывности – особенные: ожидаемая точность – первого порядка

- Для *связанных между собой систем* с *разрывами непрерывности* точность высокого порядка исчезает в пространстве между характеристиками, исходящими от разрыва*
  - Несколько недавно опубликованных работ снова подтвердили этот результат (Osher, Carpenter, *Greenough & Rider*)
- В общем случае, если начальные данные изменяются плавно и уравнения образуют нелинейную систему гиперболических уравнений закона сохранения,то в конце концов образуется разрыв непрерывности (ударная волна)
  - *Поэтому утрата точности почти наверняка имеет место!*



***Majda & Osher, *Comm. Pure Appl. Math.*, 30 1977.**

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Ниже приводится практически работающее определение скейлинга вычислительных затрат

- Функция цены решения (cost) на данной сетке и данной относительной погрешности с *той же скоростью сходимости,* даётся формулой

$$\boxed{\eta = (\mathbf{cost})(\mathbf{RE})^{(\mathbf{d}+\mathbf{1})/\mathbf{n}}}$$

  – где **d**=размерность проблемы, **n**=скорость сходимости, **RE** = относительная погрешность, в которой погрешность = $\boldsymbol{Ah^n}$

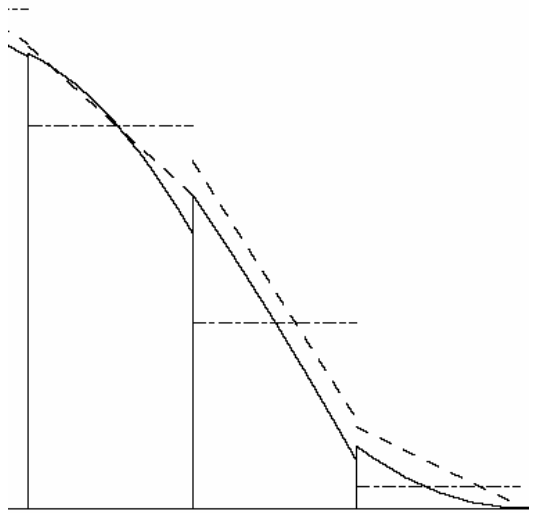
Какова относительная вычислительная работа должна быть затрачена на то, чтобы найти численно решения с заданной точностью?

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Прежде всего мы обсудим основные принципы построения современных методов, обеспечивающих высокое разрешение

По большей части мы будем обсуждать конструирование методов, использующих интерполяцию переменных в зоне.



Важно помнить, что методы должны балансировать между точностью, неустойчивостью и устойчивостью (диссипацией).

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Правила, связанные с методами, обеспечивающими высокое разрешение, являются либо строгими, либо эвристическими

- FCT – метод, в котором эвристическая монотонность определяется физическими соображениями,
- MUSCL/PPM – метод, в котором эвристическая монотонность определяется геометрическими соображениями,
- TVD – строго обоснованная алгебраическая монотонность,
- UNO/ENO/WENO – нечто промежуточное между строго обоснованной и эвристической монотонностью.

Основаны на монотонности

Конечный результат – нелинейно устойчивый метод с высоким разрешением (но не порядком).

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Что же, в конце концов, означает TVD?

- Определение: TV=суммарная вариация

$$\mathbf{TV} = \sum u_{j+1} - u_j$$

- TVD (Total Variance Diminishing) означает *уменьшение* суммарной вариации

$$\mathbf{TV}\left(u^{n+1}\right) \le \mathbf{TV}\left(u^{n}\right) \textbf{ or } \mathbf{TV}\left(\mathbf{R}\left(u^{n}\right)\right) \le \mathbf{TV}\left(u^{n}\right)$$

  – где **R**(*u*) – реконструкция (интерполяция) величины *u*
  – TVD приближённо удовлетворяет (алгебраической) монотонности

- Метод ENO тесно связан с методом TVD:

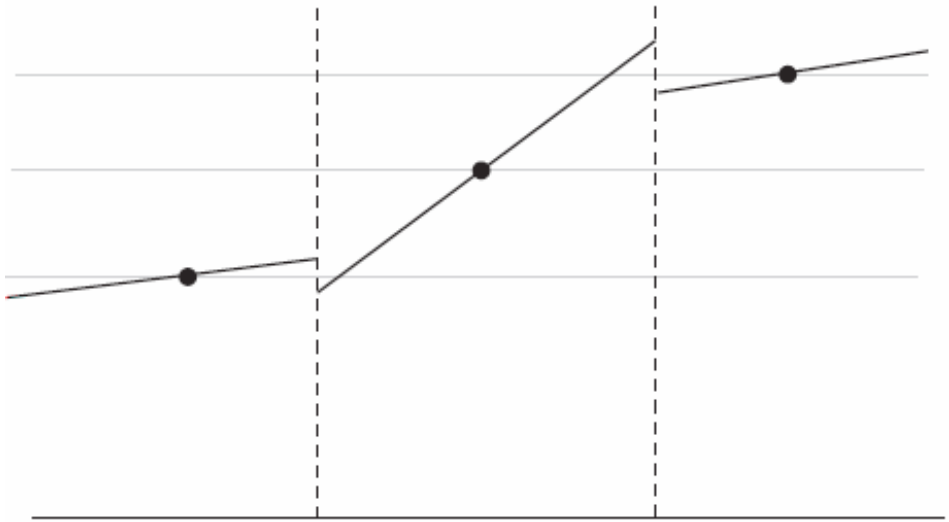
$$\mathbf{TV}\left(\mathbf{R}\left(u^{n}\right)\right) \le \mathbf{TV}\left(u^{n}\right) + O\left(h^{r+1}\right)$$

  – Таким образом, результат ENO почти монотонный с осцилляциями величины $O\left(h^{r+1}\right)$

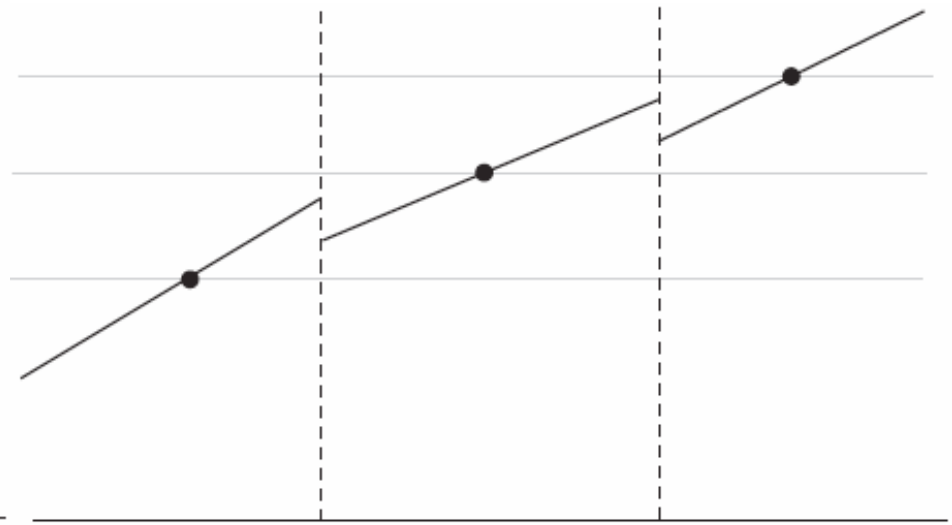
Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Монотонные методы можно построить, используя геометрический аргумент



Не монотонный



Монотонный

Это может быть представлено в алгебраической форме:

$$u(x) = u_j + s_j\left(\frac{x - x_j}{\Delta x}\right)$$

$$s_j := \mathbf{minmod}\left(s_j, 2\left(u_j - u_{j-1}\right), 2\left(u_{j+1} - u_j\right)\right)$$

minmod выдаёт минимальную абсолютную величину аргументов, если они все одного знака.

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Методы ENO, формально относящиеся к более высокому порядку, используют адаптивный шаблон; в них выбирается шаблон, на котором решение изменяется наиболее плавно (гладко).

1-ый порядок

$$u_{j+1/2} = u_j$$

2-ой порядок

$$u_{j+1/2} = \left(3u_j - u_j\right)/2$$

2-ой порядок

$$u_{j+1/2} = \left(u_j + u_{j+1}\right)/2$$

3-ий порядок

$$u_{j+1/2} = \left(11u_j - 7u_{j-1} + 2u_{j-2}\right)/6$$

3-ий порядок

$$u_{j+1/2} = \left(2u_{j+1} + 5u_j - u_{j-1}\right)/6$$

3-ий порядок

$$u_{j+1/2} = \left(2u_j + 5u_{j+1} - u_{j+2}\right)/6$$

4-ый порядок

4-ый порядок

4-ый порядок

4-ый порядок

- Выбор шаблона в ENO-схеме *адаптивный*, выбирается тот шаблон, который ближе всего к следующему с более низким порядком.

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Те же самые последовательные разности можно получить, используя иной путь.

1-ый порядок

$$u_{j+1/2} = u_j$$

2-ой порядок

$$u_{j+1/2} = \left(3u_j - u_j\right)/2$$

2-ой порядок

$$u_{j+1/2} = \left(u_j + u_{j+1}\right)/2$$

3-ий порядок

$$u_{j+1/2} = \left(11u_j - 7u_{j-1} + 2u_{j-2}\right)/6$$

3-ий порядок

$$u_{j+1/2} = \left(2u_{j+1} + 5u_j - u_{j-1}\right)/6$$

3-ий порядок

$$u_{j+1/2} = \left(2u_j + 5u_{j+1} - u_{j+2}\right)/6$$

4-ый порядок

4-ый порядок

4-ый порядок

4-ый порядок

- Шаблоны высокого порядка оцениваются попарно.

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Взвешенные ENO методы отличаются по своему подходу, но результаты сходные

Критерии гладкости

1-ый порядок

$$u_{j+1/2} = u_j$$

2-ой порядок

$$u_{j+1/2} = \left(3u_j - u_j\right)/2$$

2-ой порядок

$$u_{j+1/2} = \left(u_j + u_{j+1}\right)/2$$

3-ий порядок

$$u_{j+1/2} = \left(11u_j - 7u_{j-1} + 2u_{j-2}\right)/6$$

3-ий порядок

$$u_{j+1/2} = \left(2u_{j+1} + 5u_j - u_{j-1}\right)/6$$

3-ий порядок

$$u_{j+1/2} = \left(2u_j + 5u_{j+1} - u_{j+2}\right)/6$$

4-ый порядок

4-ый порядок

4-ый порядок

4-ый порядок

- Эти методы оценивают ***все*** шаблоны высокого порядка и сравнивают их алгебраически.

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Взвешенные ENO-методы могут иметь *очень* высокий формальный порядок точности*.

- Нелинейная выпуклая комбинация схем – три от 3-го до 5-го порядка, четыре – от 4-го до 7-го порядка…
- Нелинейность входит вместе с детекторами плавности

$$f_{j+1/2} = \sum_m \omega_m f^m_{j+1/2,m}$$

- Потоки 3-го порядка

$$f_{j+1/2,1} = \frac{1}{3} f_{j-2} - \frac{7}{6} f_{j-1} + \frac{11}{6} f_j$$

$$f_{j+1/2,2} = -\frac{1}{6} f_{j-1} + \frac{5}{6} f_j + \frac{1}{3} f_{j+1}$$

$$f_{j+1/2,3} = \frac{1}{3} f_j + \frac{5}{6} f_{j+1} - \frac{1}{6} f_{j+2}$$

- Константы для получения 5го порядка

$$C_1 = 1, C_2 = 6, C_3 = 3$$

$$f_{j+1/2,\mathrm{HO}} = \frac{1}{30} f_{j-2} - \frac{13}{60} f_{j-1} + \frac{47}{60} f_j + \frac{9}{20} f_{j+1} - \frac{1}{20} f_{j+2}$$

Взвешенный поток

$$\omega_k = \frac{w_k}{\sum_m w_m} \qquad w_k = \frac{C_k}{(IS_k + \varepsilon)^p}$$

$$IS_k = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} h^{2l-1} \left(q_k^{(l)}\right)^2 dx$$

$$IS_1 = \frac{13}{12}\left(f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j\right)^2 + \frac{1}{4}\left(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j\right)^2$$

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003 Los Alamos NATIONAL LABORATORY Ideas That Change the World

Разработка нового алгоритма мотивирована результатами Гринау и Райдера.

- *Можем ли мы получить лучший метод из числа методов высокого порядка, монотонных и ENO-типа?*
- Создать гибрид из нелинейных монотонных методов и методов, лишённых осцилляций*
  - Начинаем с нелинейного монотонного метода: высокий порядок + прошёл тест на монотонность
  - Если поток не монотонный, используйте среднее из значений, полученных тремя методами:
    - **i)** первоначального, полученного методом высокого порядка,
    - **ii)** ограничивающего, полученного монотонным методом,
    - **iii)** полученного методом ENO/WENO

*Подобно статьям **Huynh, *SIAM J. Num. Anal.*, 32 1995, Suresh & Huynh, *J. Comp. Phys.*, 136 1997, Daru & Tenaud, *J. Comp. Phys*., 193, 2004**

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Новые методы основаны на ограничении приближения с помощью нелинейных устойчивых методов, используя функцию-медиану.

Величина аппроксимации (значение на грани или наклон)

(W)ENO

Высокий порядок

Монотонный

Высокого порядка

Монотонный

(W)ENO

Функция-медиана () выдаёт значение, ограниченное двумя другими значениями.

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Функция-медиана имеет некоторые ключевые свойства.

- Можно использовать функцию-медиану, или ограничивающую функцию **median**(*a,b,c*), которая из трёх аргументов возвращает (выдаёт) аргумент с промежуточным (средним) значением.
  - Его значение ограничено значениями двух других.
  - Если два аргумента являются величинами $O(h^n)$, средний является такой же величиной!
  - Если один из аргументов – величина $O(h^n)$, а другой – величина $O(h^m)$ и $m<n$, то средний – величина $O(h^m)$.
  - Если два аргумента производят линейно устойчивый метод, результат применения **функции-медианы** обладает тем же свойством.

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Кусочно-параболический метод (PPM) основан на полиномиальной интерполяции.

- Мы отыскиваем локальный параболический интерполянт в виде

$$\mathbf{w}(x) = p(\theta) = p_0 + p_1\theta + p_2\theta^2; \quad \theta = (x - x_j)/\Delta x$$

- где

$$p_0 = \tfrac{3}{2}\mathbf{w}_j - \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{w}_{j-1/2} + \mathbf{w}_{j+1/2}\right)$$

$$p_1 = \mathbf{w}_{j+1/2} - \mathbf{w}_{j-1/2}$$

$$p_2 = 3\left(\mathbf{w}_{j-1/2} + \mathbf{w}_{j+1/2}\right) - 6\mathbf{w}_j$$

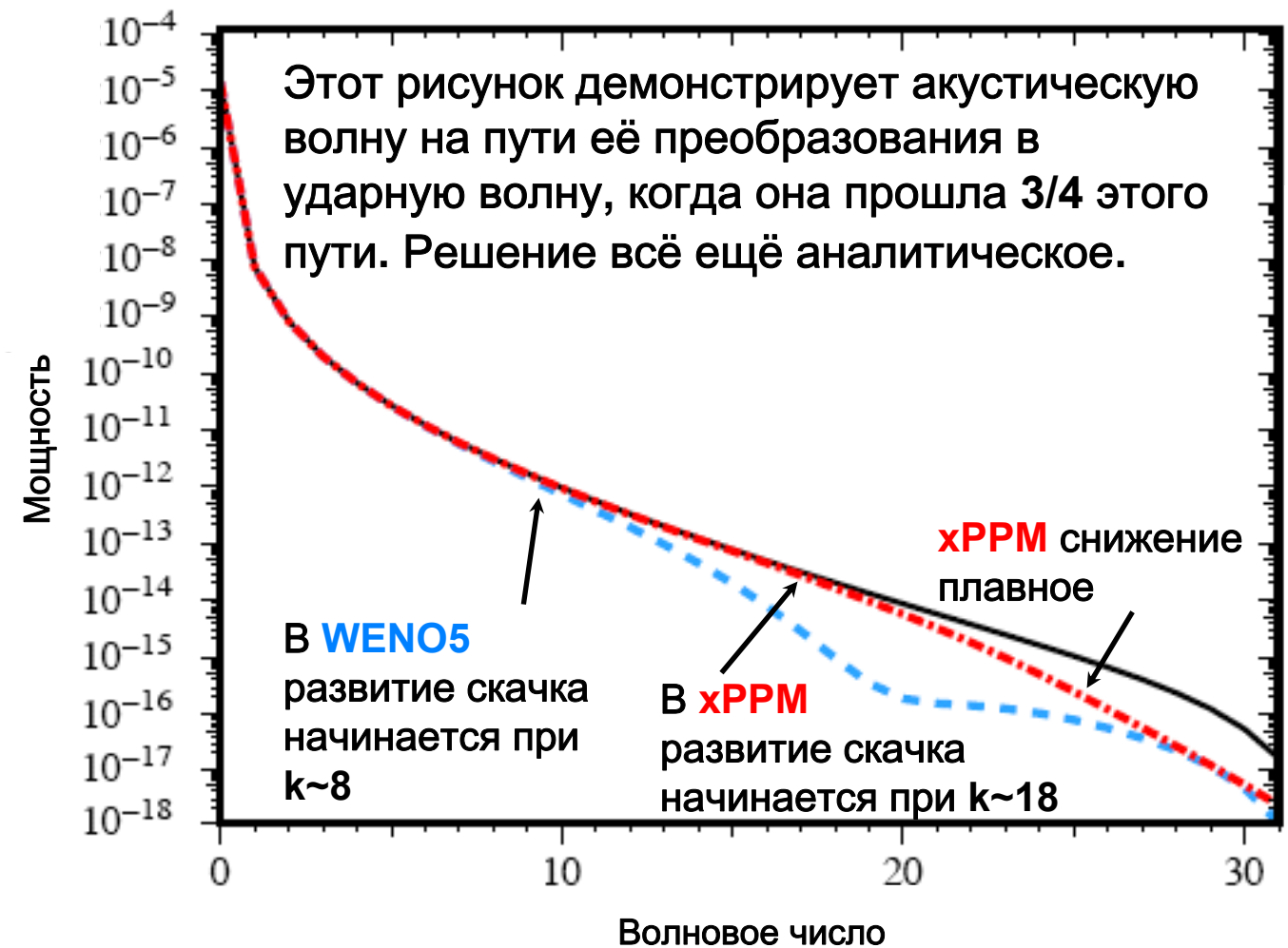
- Мы описываем здесь такой метод PPM, который интерполирует характеристические переменные, а не базисные переменные *(ρ,u,p)* исходной PPM.

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Как происходит соударение? Спектральная картина возникновения разрыва в плавной волне.

Сравним взвешенный существенно лишённый осцилляций метод 5-го порядка (WENO5) с нашим новым предельным кусочно-параболическим методом (xPPM).



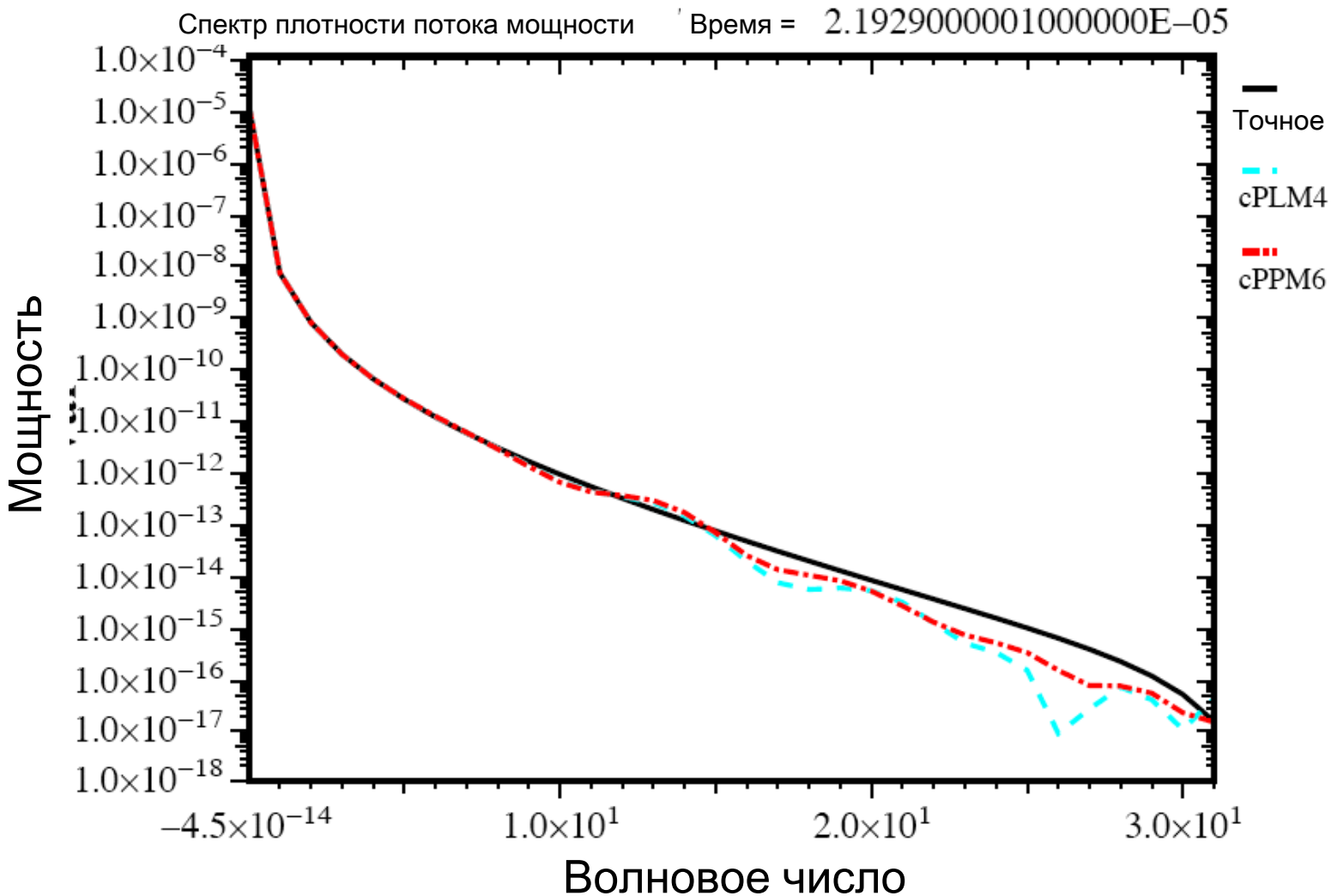
Точные методы

WENO5

xPPM

Новые алгоритмы приводят к большей точности и лучшему поведению там, где точности уже нет. Эти свойства означают лучшую эффективность и улучшенное физическое моделирование.

Как происходит соударение? Спектральная картина возникновения разрыва в плавной волне.



Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

Как работают эти методы в расчёте проблемы отражения ударной волны, движущейся со скоростью 10 Mах*.

QuickTime™ and a
TIFF (LZW) decompressor
are needed to see this picture.

QuickTime™ and a
TIFF (LZW) decompressor
are needed to see this picture.

*Ударная волна, движущаяся со скоростью 10 Mах и отражающаяся от клина с углом 60 градусов.

Bill Rider
rider@lanl.gov

1943 - 2003
Los Alamos
NATIONAL LABORATORY
Ideas That Change the World

QuickTime™ and a
TIFF (LZW) decompressor
are needed to see this picture.

QuickTime™ and a
TIFF (LZW) decompressor
are needed to see this picture.

QuickTime™ and a
TIFF (LZW) decompressor
are needed to see this picture.

QuickTime™ and a
TIFF (LZW) decompressor
are needed to see this picture.

QuickTime™ and a
TIFF (LZW) decompressor
are needed to see this picture.

QuickTime™ and a
TIFF (LZW) decompressor
are needed to see this picture.

Bill Rider
rider@lanl.gov

Вопрос: Как получить максимум результатов из разностного шаблона?

- Используйте лучшие части различных методов в такой комбинации, где каждый работает «оптимально».
- Формальная точность не обязательно приводит к лучшим или наиболее эффективным решениям. Однако алгоритмические элементы высокого порядка действительно существенно улучшают алгоритмическую эффективность.
- Используя принципы ограничения, создавайте приближения высокой точности и нелинейно устойчивые.
- *Всегда нужно заботиться о вычислительной эффективности и измерять её.*

Bill Rider
rider@lanl.gov