Моделирование по методу Лагранжа в Сандийских Национальных лабораториях: Современное состояние и будущие направления

А. С. Робинсон, М. В. Хейнстейн и Г. Сковацци

Совместная Российско-Американская конференция пяти лабораторий по вычислительной математике/физике

19-23 июня 2005

Вена, Австрия

Sandia is a multiprogram laboratory operated by Sandia Corporation, a Lockheed Martin Company, for the United States Department of Energy's National Nuclear Security Administration under contract DE-AC04-94AL85000.

Моделирование по методу Лагранжа

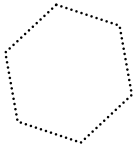
- Моделирование по методу Лагранжа, включая контактное моделирование, крайне эффективно при моделировании сложных жестких структур под действием существенных, но не экстремальных упругих и пластичных деформаций.
- Основные трудности
  - Исторический упор на средний градиент четырехугольной и шестиугольной дискретизации.
  - Генерация шестигранной сетки является слишком длительной и дорогостоящей.
  - Альтернативные стратегии дискретизации необходимы для четырехгранных сеток.
- Ниже представлен обзор двух подходов к решению этих проблем.

Sandia National Laboratories

Узловые однородные элементы напряжения (Узловые Тет (NBT))

- Ссылочные материалы: Дорман и др. Международный журнал числовых методов ., **47:1540-1568 (2000)**
- Треугольники, **J**; Узлы, **J_k, I, L**

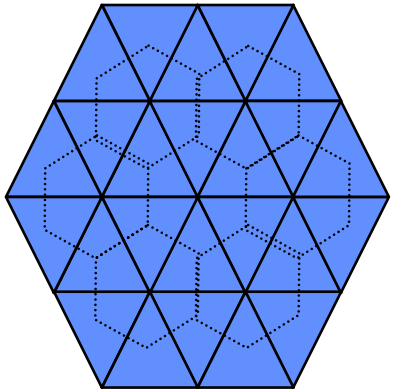
$$B_{Jik} = \partial A_J / \partial x_{iJ_k} \qquad A_J = x_{iJ_k} B_{Jik}$$



$$1 = \alpha_{J_1 J} + \alpha_{J_2 J} + \alpha_{J_3 J}$$

$$\acute{A}_L = \alpha_{LJ} A_J \qquad \acute{B}_{LiI} = \partial \acute{A}_L / \partial x_{iI}$$

$$f_{iI} = \sigma_{ij}^{L} \acute{B}_{LjI}$$

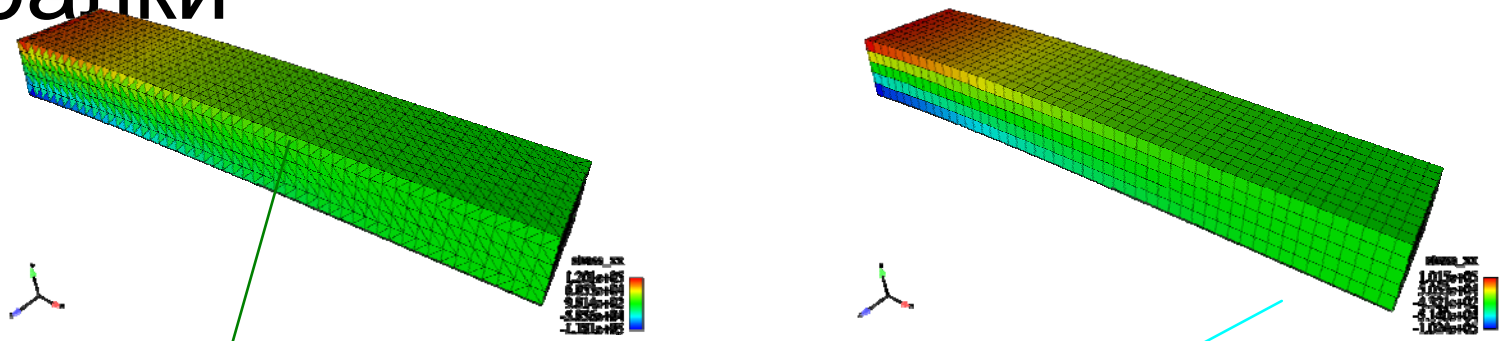


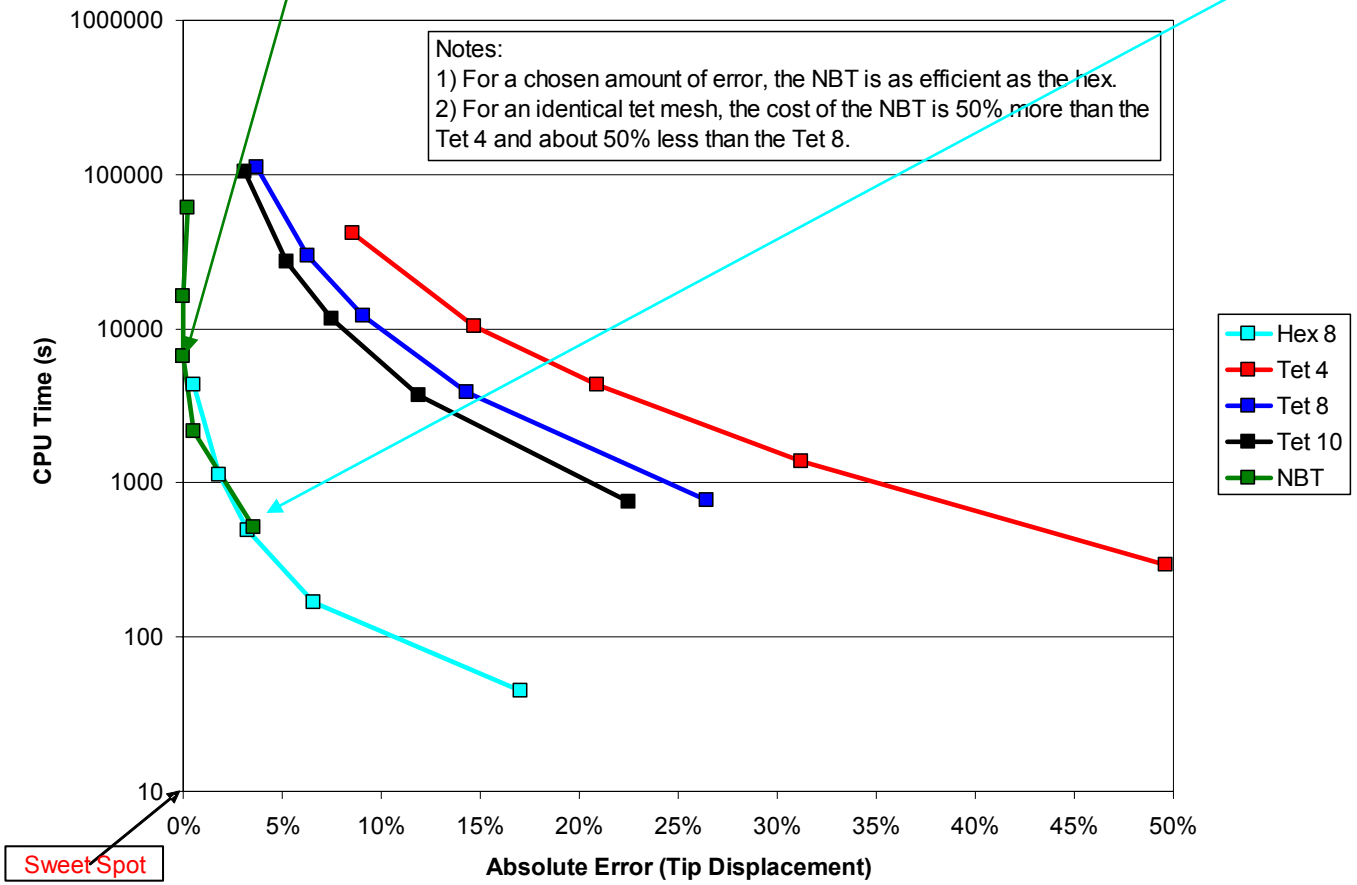
Смещения и напряжения располагаются в центре узлов первоначальной сетки (центры шестигранников), что позволяет выбрать оптимальное соотношение ограничений.

Большой шаблон

Sandia National Laboratories

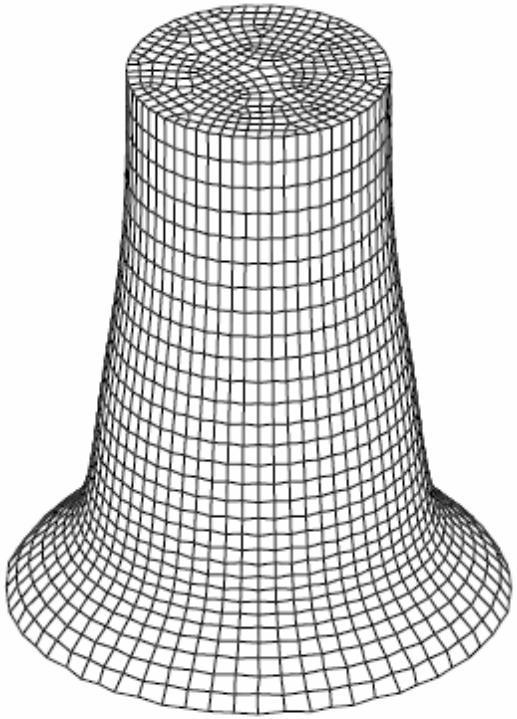
Сравнение на примере изгиба балки

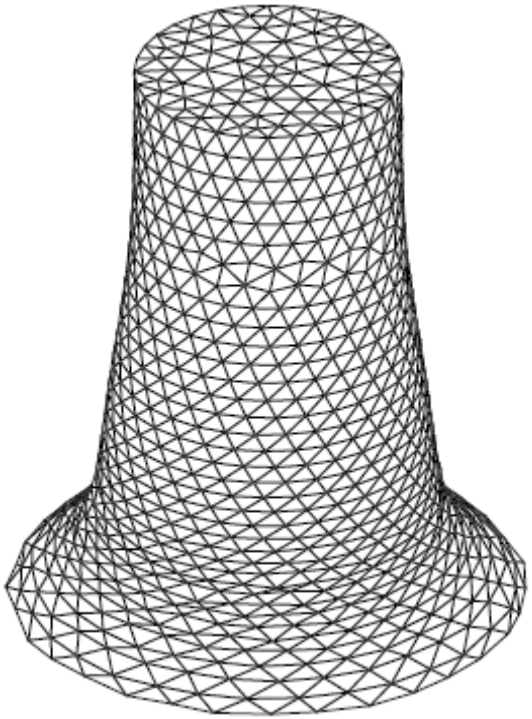




Sandia National Laboratories

Соударение Тейлора – Hex8 по сравнению с узловым Tet





Узловые tet успешно проходят основные литмусовые испытания.

Примеры предоставлены: S.W. Key, J.D. Gruda, и A.S. Gullerud

Sandia National Laboratories

Узловые элементы tet – Опыт использования

- Элементы хорошо работают без блокировки.
- Четкая суперконвергенция на расстоянии от границ.
- Дороже, чем шестигранные элементы, но конкурентноспособны.
- Эти элементы позволяют быстро выполнить расчеты в тех случаях, когда построение геометрической сетки является основным затрудняющим фактором.

Sandia National Laboratories

SUPG Гидродинамика стабилизированного соударения

- Обзор текущего гидродинамического исследования опережающего потока Петрова - Галеркина
  - Сковацци (Сандия), Марк А. Кристон (ЛАНЛ), Томас Дж.Р. Хьюз (Институт вычислительной науки и техники (ICES), Университет штата Техас, Остин)

- Надежное моделирование на сетках симплексного вида (2-х мерные треугольники/3-х мерные четырехгранники)
  - Отсутствует искусственная жесткость, нет блокировки

- Концепция SUPG (*Брукс и Хьюз, CMAME, 1982*):
  - *Стабильная многомерная формула адвективных диффузионных систем*
  - Вариационное постоянство, практически по методу Петрова - Галеркина
  - *Расчет оптимальной ошибки для диффузионных и адвективных пределов*
  - Используется для сжимаемой системы Navier-Stokes в Эйлеровых координатах (1986-1995, Хьюз и др.)

- Гидродинамическое уравнение Лагранжа 2-го порядка по времени/пространству:
  - Четырехугольные и треугольные элементы в 2-х мерном пространстве
  - Глобально консервативный, локально частично консервативный подход
  - Все переменные с центром в узлах $\Rightarrow$ решена проблема реконструкции градиента давления
  - Непрерывная корректировка пространства в системе пространство-время: линейность времени-пространства на отдельных отрезках
  - Прерывистость времени/непрерывность корректировки пространства: постоянство времени/линейность пространства
  - Дискретизация пространства - времени + квадратичность одиночной точки во времени $\Rightarrow$ средняя точка является определяющей по времени
  - Прогнозирование/множественная корректировка с использованием нелинейной итерации фиксированной точки
  - Специфическая стабилизация SUPG $\Rightarrow$ существенное значение инвариантности Галлилея
  - Вязкость типа Noh $\Rightarrow$ отсутствует перегрев

Sandia National Laboratories

SUPG гидродинамика стабилизированного соударения

- 1мерная чистая адвекция:

От центральной к восходящей разности с использованием числовой вязкости:

$$c\frac{\partial\phi}{\partial x} \cong c\left(\frac{\phi_{n+1}-\phi_n}{\Delta x}\right) = c\left(\frac{\phi_{n+1}-\phi_{n-1}}{2\Delta x}\right) + \boxed{\frac{c\Delta x}{2}\left(\frac{\phi_{n+1}-2\phi_n+\phi_{n-1}}{\Delta x^2}\right)}$$

- **Постоянство SUPG: возмущение проверочной функции** $p = \tau c w_{,x}$, $\tau = \Delta x / (2c)$

$$0 = \int_0^L (-w_{,x} c\phi - w f)\,dx + \sum_{n=1}^{N_{el}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \boxed{p(c\phi_{,x}} - f)\,dx \int_{x_{n-1}}^{x_n} \boxed{p\,\phi_{,x}}\,dx \Leftrightarrow \boxed{\frac{|c|\Delta x}{2}\left(\frac{\phi_{n+1}-2\phi_n+\phi_{n-1}}{\Delta x^2}\right)}$$

- **Гиперболическая система законов сохранения: Использовать характеристики SUPG**

Conservation form: $\overbrace{\dot{U}(Y) + F_{i,i}(Y) + Z(Y) - \mathcal{F}}^{\mathcal{N}(Y)} = 0$

Quasi-linear form: $\underbrace{A_0\dot{Y} + A_i Y_{,i} + CY}_{\mathcal{L}Y} - \mathcal{F} \equiv Res\ Y = 0$

$$\mathcal{L}_{adv} = A_0\frac{\partial}{\partial t} + A_i\frac{\partial}{\partial X_i} \quad , \quad ResY^h = \overbrace{(\mathcal{L}_{adv} + C)}^{\mathcal{L}} Y^h - \mathcal{F}$$

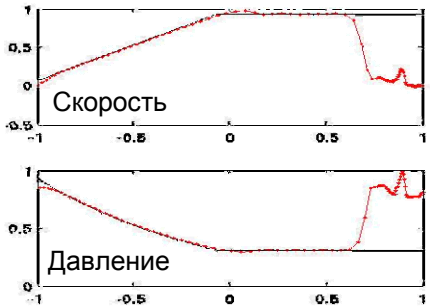
$$\mathcal{SUPG}(W^h, Y^h) = -\sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q_n^e} (\boxed{\mathcal{L}^*_{adv} W_h) \cdot \tau}\ Res(Y^h)\,dQ$$

Sandia National Laboratories

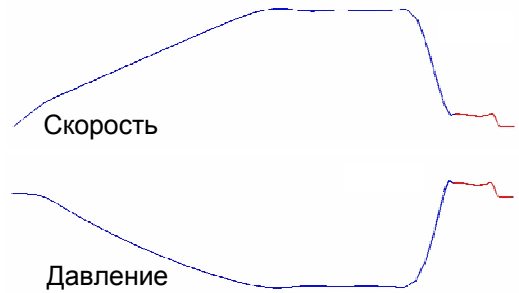
Результаты:
1- , 2-х мерные четырехугольники, 2-х мерные треугольники

- **Проверка Sod: длительное поведение (T=0.9): отражено соударение/взаимодействие**

Стандартная гидропрограмма:
CFL=0.9,
100 элементов

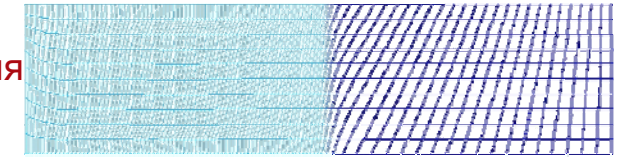


SUPG:
CFL=0.9
100 элементов
2 корректировки

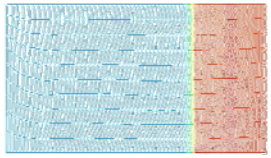


- **SUPG: Тест Зальцмана, четырехугольники, 6 отражений!** Давление: CFL=0.9, 2 корректировки

до 1го отражения



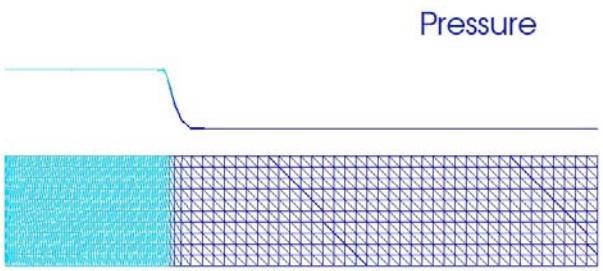
после 1го отражения

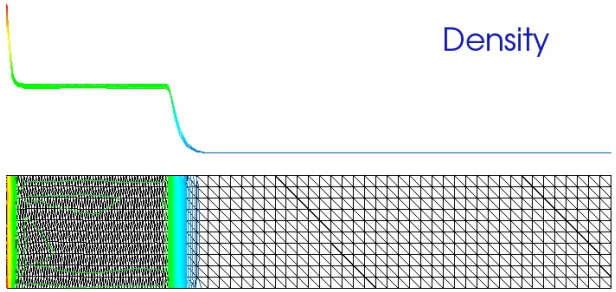


после 5го отражения

- **SUPG: Тест Noh,треугольная сетка (соотношение сторон 1:1,картезианские координаты):**

CFL=0.75, 2 корректировки, 2000 треугольных элементов





Sandia National Laboratories

Заключение

- Технология использования узловых однородных элементов напряжения (узловых **tet**) в моделировании по методу Лагранжа представляется оптимальной для ускорения вычислений.

- Подход **SUPG** для гидродинамических соударений позволяет получить четкое решение на треугольных сетках.

Sandia National Laboratories