

---

# **Взаимодействие излучения и вещества в плазмах низкой плотности**

---

**Представлено на совместную российско-американскую  
конференцию пяти лабораторий  
по вычислительной математике и физике**



**Х. А. Скотт (H.A. Scott)**

**Ливерморская национальная лаборатория им. Лоуренса**

**23 июня 2005 г.**

**Данная работа выполнена при поддержке Министерства энергетики США Ливерморской национальной лабораторией им. Лоуренса Университета штата Калифорния по контракту № W-7405-Eng-48.**

**Адрес: Lawrence Livermore National Laboratory, P.O. Box 808, Livermore, CA 94551-0808**



# Содержание

---

- **Реакция на излучение**
  - **Баланс энергии и теплоемкость**
  - **Линеаризованное уравнение переноса**
  - **Функция поглощения и источника**
- **Прямое решение многогрупповых уравнений**

# Уравнения переноса излучения и энергии материала



Уравнение переноса излучения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu &= -(\alpha_\nu I_\nu - \eta_\nu) \\ &= -\alpha_\nu (I_\nu - S_\nu)\end{aligned}$$

Уравнение энергии материала:

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = 4\pi \int (\alpha_\nu J_\nu - \eta_\nu) d\nu + S_m \quad J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega$$

$$E_m = \frac{3}{2} n_e k T_e + E_{\text{int}}, \quad c_V = \left( \frac{\partial E_m}{\partial T_e} \right)_V$$



# Реакция материала зависит от излучения

Удельная энергия материала:

$$E_m = \frac{3}{2} n_e k T_e + E_{\text{int}}(T_e, J_\nu, t)$$

Формула в приближении локального термодинамического равновесия (LTE):

$$\frac{dE_m}{dt} = c_V \frac{dT_e}{dt}, \quad c_V = \left( \frac{\partial E_m}{\partial T_e} \right)_{J_\nu = B_\nu}$$

Формула в отсутствии локального термодинамического равновесия (NLTE):

$$\frac{dE_m}{dt} = \underbrace{\left( \frac{\partial E_m}{\partial T_e} \right)_{J_\nu}}_{c_V^{NLTE}} \frac{\partial T_e}{\partial t} + \underbrace{\sum_\nu \left( \frac{\partial E_m}{\partial J_\nu} \right)_{T_e} \frac{\partial J_\nu}{\partial t}}_{\text{Реакция на излучение}} + \underbrace{\left( \frac{\partial E_m}{\partial t} \right)_{J_\nu, T_e}}_{S_e}$$

Член уравнения  $S_e$ , соответствующий источнику энергии, обусловлен изменениями при фиксированных  $T_e$  и  $J_\nu$

Принятие значения удельной теплоемкости в приближении локального термодинамического равновесия эквивалентно предположению о планковом поле излучения:

$$c_V^{LTE} = \left( \frac{\partial E_m}{\partial T_e} \right)_{J_\nu} + \sum_\nu \left( \frac{\partial E_m}{\partial J_\nu} \right)_{T_e} \frac{\partial B_\nu}{\partial T_e}$$

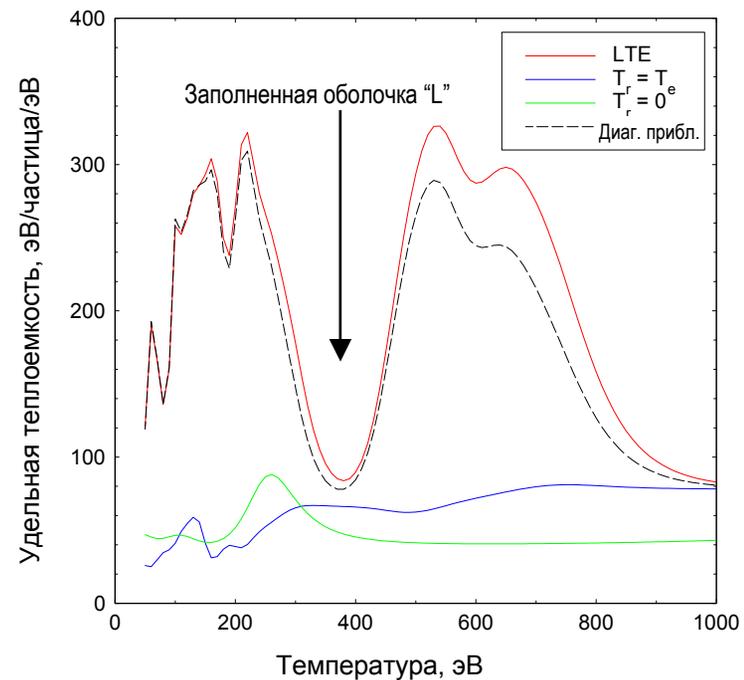
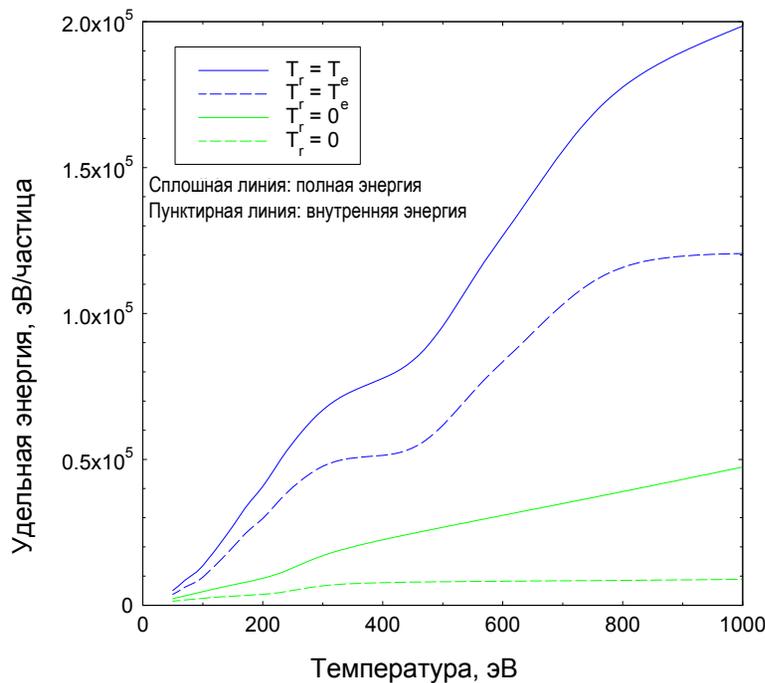
# Пример: составляющие энергии ксеноновой плазмы



“Диагональное” приближение для  $c_V^{LTE}$  : расчет  $\left(\frac{\partial E_m}{\partial J_\nu}\right)_{T_e}$  с использованием только фотовозбуждений

$$N_i = 10^{18} \text{ см}^{-3}$$

$$N_i = 10^{18} \text{ см}^{-3}$$

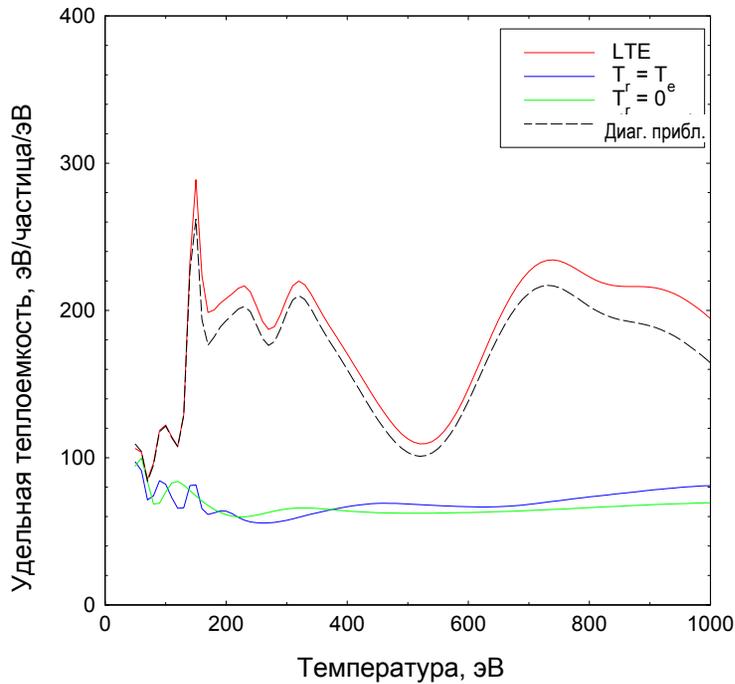


**В состоянии, далеком от локального термодинамического равновесия, реакция на излучение может определять удельную теплоемкость материала.**

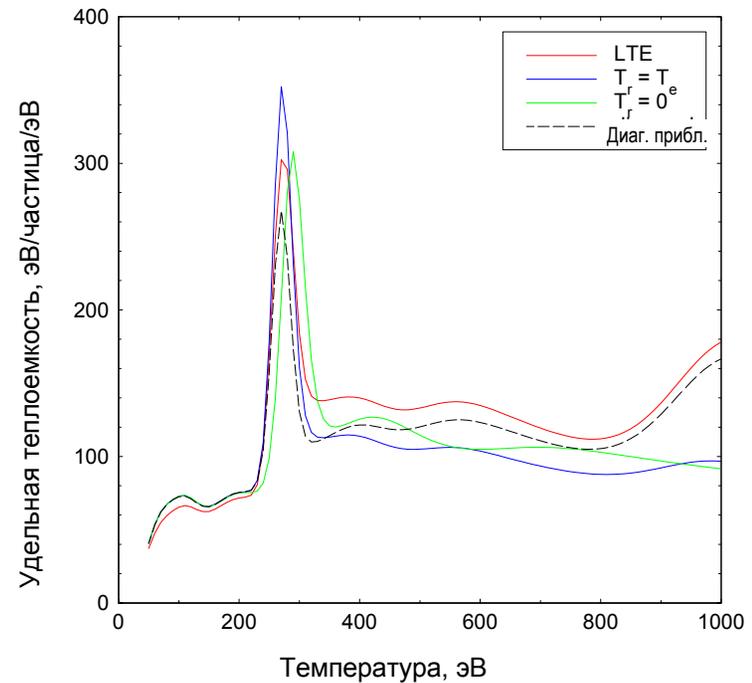
# Пример: удельная теплоемкость ксеноновой плазмы



$$N_i = 10^{20} \text{ см}^{-3}$$

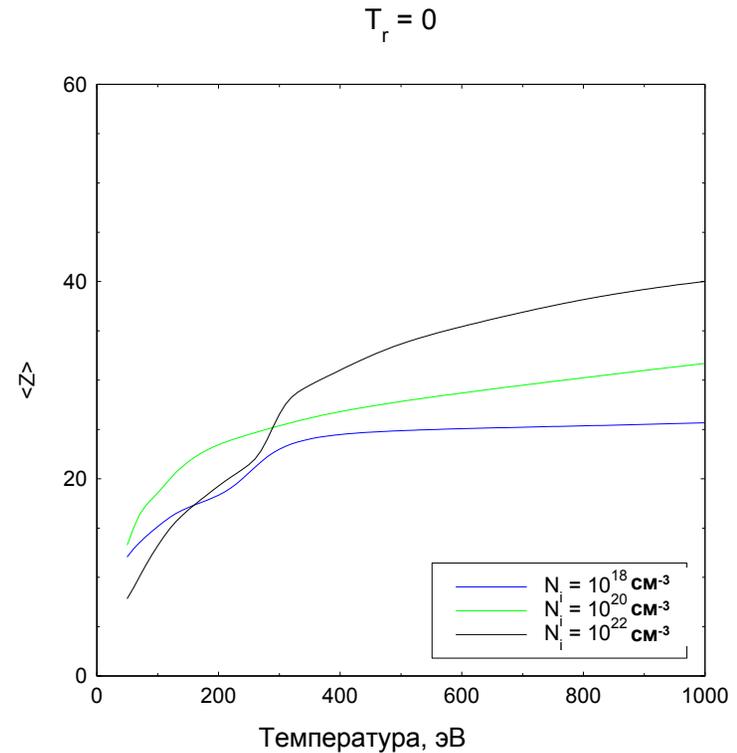
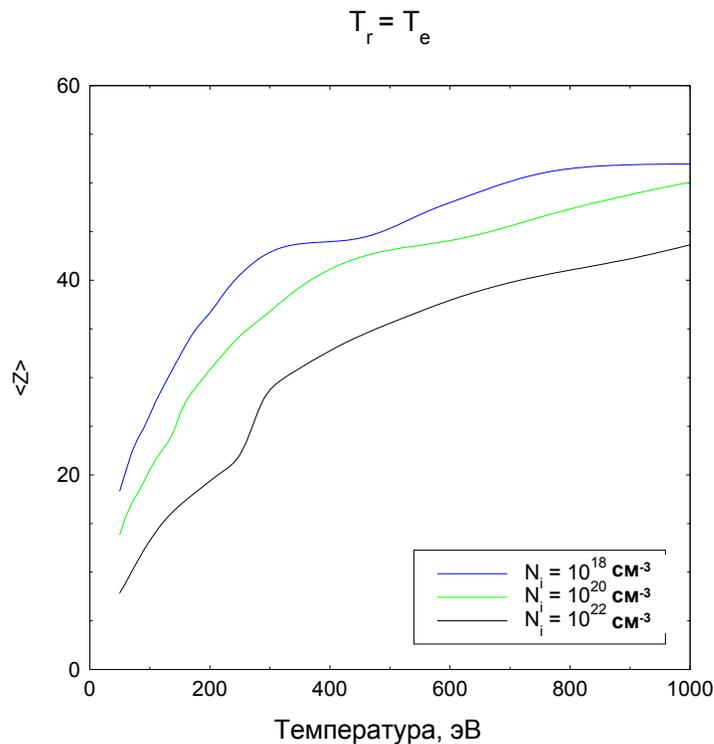


$$N_i = 10^{22} \text{ см}^{-3}$$



**По мере приближения к локальному термодинамическому равновесию реакция на излучение падает.**

# Пример: равновесная степень ионизации ксеноновой плазмы



**Удельная теплоемкость отражает наклон кривой зависимости равновесной степени ионизации от температуры**

# Линеаризованные уравнения переноса излучения



- Основные уравнения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = -(\alpha_\nu I_\nu - \eta_\nu)$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = 4\pi \int (\alpha_\nu J_\nu - \eta_\nu) d\nu + S_m \quad J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega$$

- Линеаризованные уравнения (только относительно  $T$ )

$$c_T \frac{\Delta T}{\Delta t} = \int (\alpha_\nu J_\nu - \eta_\nu^0) d\nu + S_m, \quad c_T = \frac{\partial E_m}{\partial T} + \Delta t \int \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} d\nu$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu &= -(\alpha_\nu I_\nu - \eta_\nu^0) + \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \Delta T \\ &= -(\alpha_\nu I_\nu - \eta_\nu^0) + \frac{\Delta t}{c_T} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \int (\alpha_\nu J_\nu - \eta_\nu^0) d\nu + \frac{\Delta t}{c_T} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} S_m \end{aligned}$$

# Реакция на излучение влияет на эмиссию и абсорбцию



- Полные линеаризованные уравнения (относительно  $T$  и  $J_\nu$ )

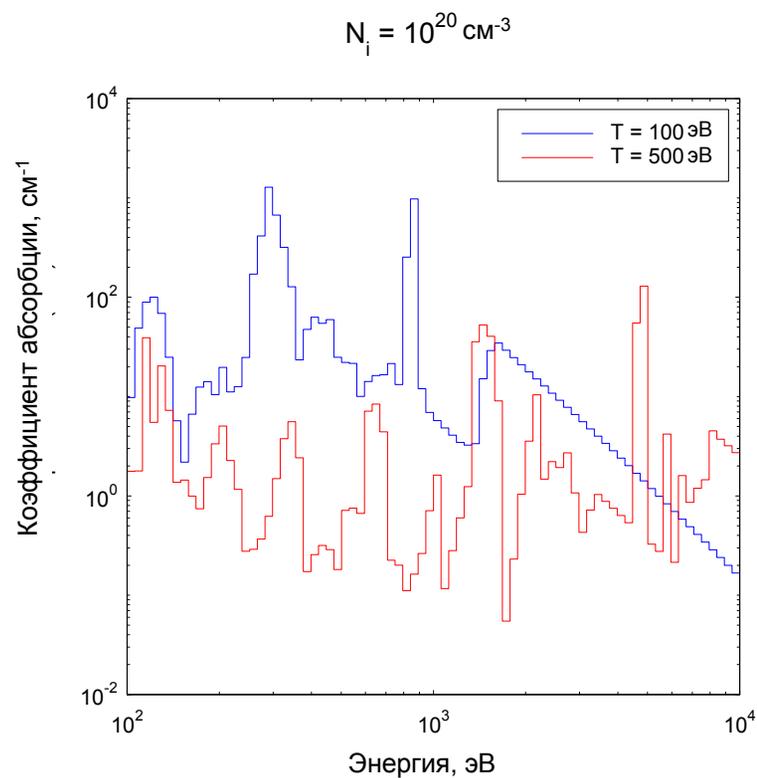
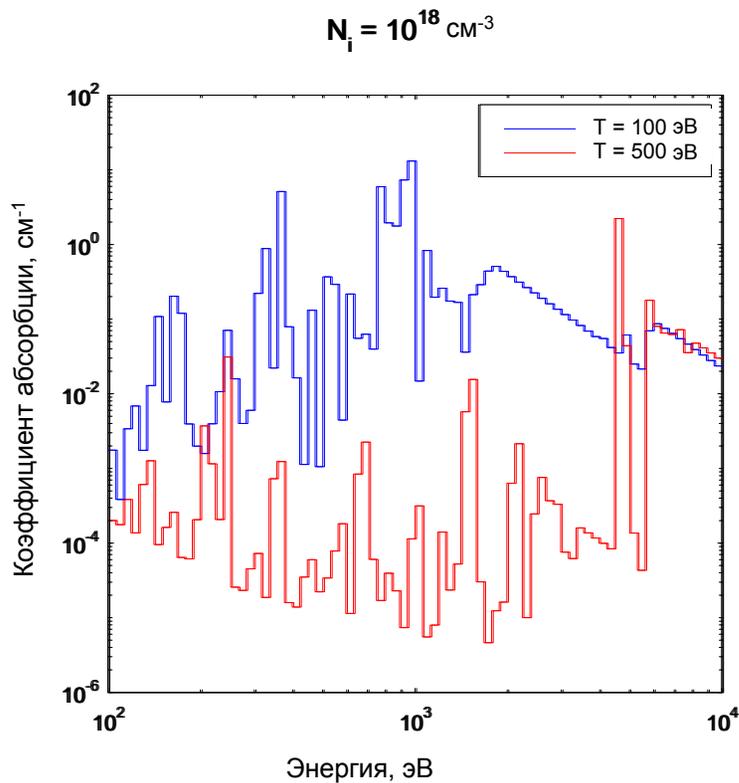
$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = -(\alpha_\nu I_\nu - \eta_\nu^0) + \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T_e} (T_e - T_e^0) + \sum_{\nu'} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial J_{\nu'}} (J_{\nu'} - J_{\nu'}^0)$$

$$c_T \frac{\Delta T}{\Delta t} = \int (\alpha_\nu J_\nu - \eta_\nu^0) d\nu + \sum_{\nu'} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial J_{\nu'}} (J_{\nu'} - J_{\nu'}^0) + S_m - \sum_{\nu'} \frac{\partial E_m}{\partial J_{\nu'}} (J_{\nu'} - J_{\nu'}^0)$$

- В диагональном приближении ( $\nu' = \nu$ ) важнейшие изменения функции абсорбции и эмиссии (источника) описываются следующим образом:

$$\alpha_\nu \leftarrow \tilde{\alpha}_\nu = \alpha_\nu - \frac{\partial \eta_\nu}{\partial J_\nu} \quad \text{или} \quad S_\nu^0 \leftarrow \tilde{S}_\nu = S_\nu^0 \left( 1 - \frac{\partial S_\nu}{\partial J_\nu} \right)$$
$$\eta_\nu^0 \leftarrow \tilde{\eta}_\nu = \eta_\nu^0 - \frac{\partial \eta_\nu}{\partial J_\nu} J_\nu^0$$

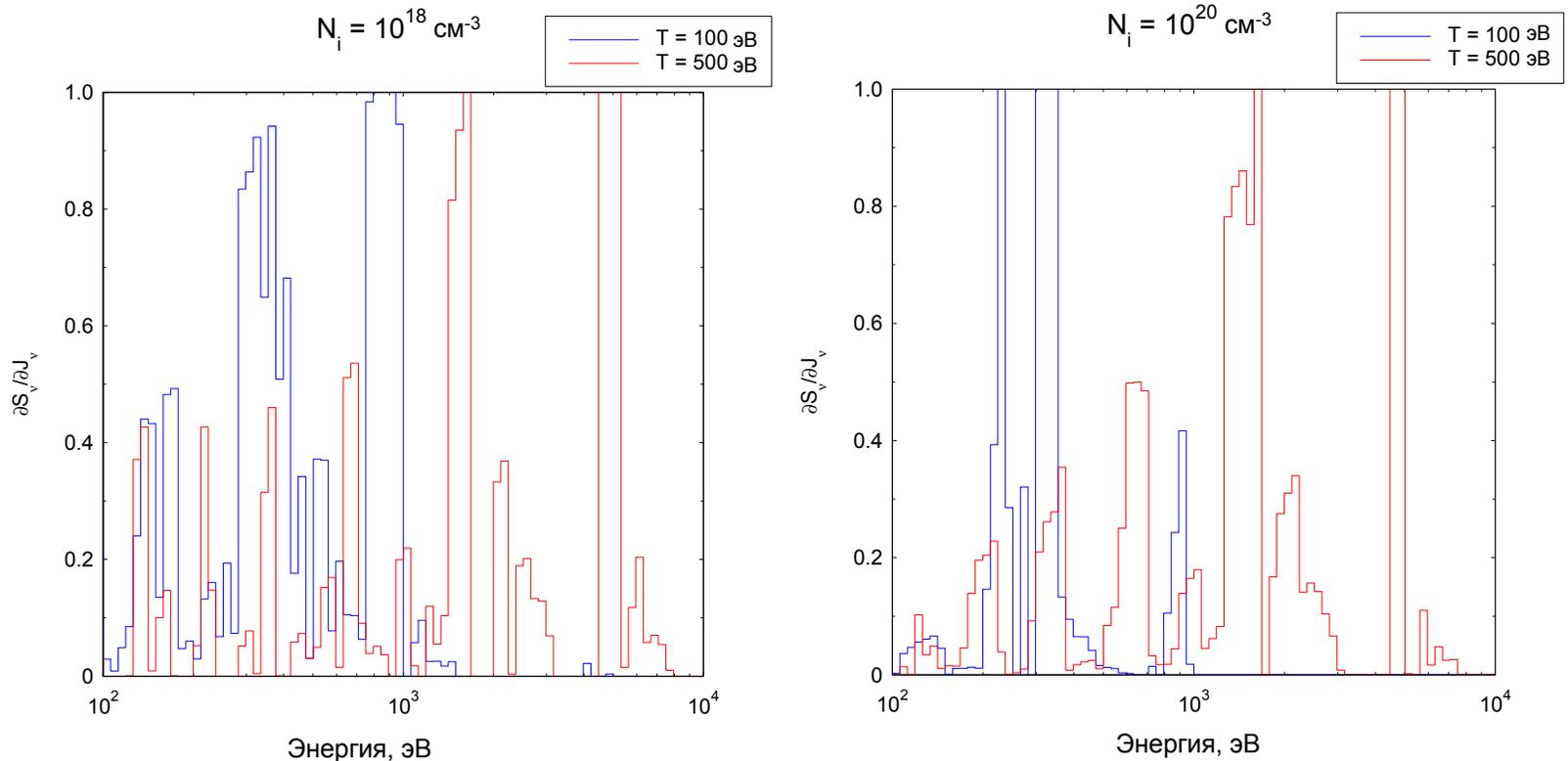
# Пример: значения степени поглощения ксеноновой плазмы



# Пример: реакция функции источника ксеноновой плазмы



Рассчитана в “диагональном” приближении с  $T_r = 0.9 T_e$



“Большие” значения,  $\frac{\partial S_v}{\partial J_v} \approx 1$ , соответствуют сильным спектральным линиям



# Влияние на алгоритмы решений

---

- Энергетические характеристики материалов могут сильно изменяться в поле излучения:
  - описываются не только удельной теплоемкостью;
  - реакция внутренней энергии на излучение может иметь доминирующее значение.
- Функция источника также зависит от поля излучения
  - переходы в линиях сильно связаны с излучением и слабо связаны с температурой;
  - пренебрежение производными в отношении  $J_\nu$  может привести к потере устойчивости решения;
  - Статья Х. А. Скотта «Перенос излучения в плазмах с сильным излучением при отсутствии локального термодинамического равновесия» (“Non-LTE Radiation Transport in High Radiation Plasmas”, H.A. Scott) выходит в журнале «Физика высоких энергий» (HEDP), 1 (2005).
- Многогрупповая структура уравнений остается без изменений
  - свойства сходимости могут существенно изменяться;
  - эффективность “серого” ускорения сходимости зависит от спектра поглощения.

# Прямое решение многогрупповых уравнений



- Линеаризованные уравнения

$$c_T \frac{\Delta T}{\Delta t} = \int (\tilde{\alpha}_v J_v - \tilde{\eta}_v) dv + S_m, \quad c_T = \frac{\partial E_m}{\partial T} + \Delta t \int \frac{\partial \eta_v}{\partial T} dv$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_v &= -(\tilde{\alpha}_v I_v - \tilde{\eta}_v) + \frac{\partial \eta_v}{\partial T} \Delta T \\ &= -(\tilde{\alpha}_v I_v - \tilde{\eta}_v) + \frac{\Delta t}{c_T} \frac{\partial \eta_v}{\partial T} \int (\tilde{\alpha}_v J_v - \tilde{\eta}_v) dv + \frac{\Delta t}{c_T} \frac{\partial \eta_v}{\partial T} S_m \end{aligned}$$

- Выраженное в виде оператора лямбда,  $\lambda_v$

$$\begin{aligned} \lambda_v^{-1} I_v &\equiv \frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_v = \chi_v \int \tilde{\alpha}_v J_v dv + q_v \\ \chi_v &= \frac{\Delta t}{c_T} \frac{\partial \eta_v}{\partial T}, \quad q_v = \chi_v (S_m - \int \tilde{\eta}_v dv) \end{aligned}$$



# Алгебраическое преобразование уравнений

- Интегрирование по углам и частотам для алгебраического решения следующего уравнения:

$$\int \tilde{\alpha}_\nu J_\nu d\nu = [\mathbf{1} - \Lambda]^{-1} \mathbf{Q}$$

$$\Lambda = \left[ \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \tilde{\alpha}_\nu \lambda_\nu \chi_\nu d\nu \right], \quad \mathbf{Q} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \tilde{\alpha}_\nu \lambda_\nu q_\nu d\nu$$

- Подстановка в первоначальные уравнения для получения значений интенсивности:

$$\lambda_\nu^{-1} I_\nu = \chi_\nu [\mathbf{1} - \Lambda]^{-1} \mathbf{Q} + q_\nu$$

- Каждый расчет  $\lambda_\nu$  требует прогонки уравнений переноса, но не требует проведения матричных операций.
- Решение требует построения оператора, обратного полному оператору  $\Lambda$

# Простая итеративная форма позволяет добиться сходимости для остающихся нелинейностей



- Итерации определяются следующим образом:

$$J_v^{(i)} = \frac{1}{4\pi} \int I_v^{(i)} d\Omega \quad \lambda_v^{-1} I_v^{(i+1/2)} = \chi_v \int \tilde{\alpha}_v J_v^{(i)} dv + q_v$$
$$I_v^{(i+1)} = I_v^{(i+1/2)} + \delta I_v$$

- Выраженные в виде поправок к интенсивности,  $\delta_v$

$$\lambda_v^{-1} \delta_v = \chi_v \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \tilde{\alpha}_v \delta_v dv + \chi_v \int \tilde{\alpha}_v \Delta J_v dv \quad \Delta J_v = J_v^{(i+1/2)} - J_v^{(i)}$$
$$= \chi_v \left[ \mathbf{1} - \Lambda \right]^{-1} \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} = \int \tilde{\alpha}_v \Delta J_v dv$$

Этот метод обеспечивает выделение и нахождение единственной величины  $\mathbf{K}$ , которая связывает излучение с изменением температуры.

# Тестовый пример – многогрупповая волна Маршака (Marshak)



- Свойства материала:

$$\gamma = 5/3 \text{ (идеальный газ), } \rho = 1 \text{ г/см}^3, \Delta x = 2 \text{ см}$$

- Начальные и граничные условия:

$$T = 1 \text{ эВ, } T_{\text{граничная}} = 1 \text{ кэВ}$$

- Коэффициент абсорбции:

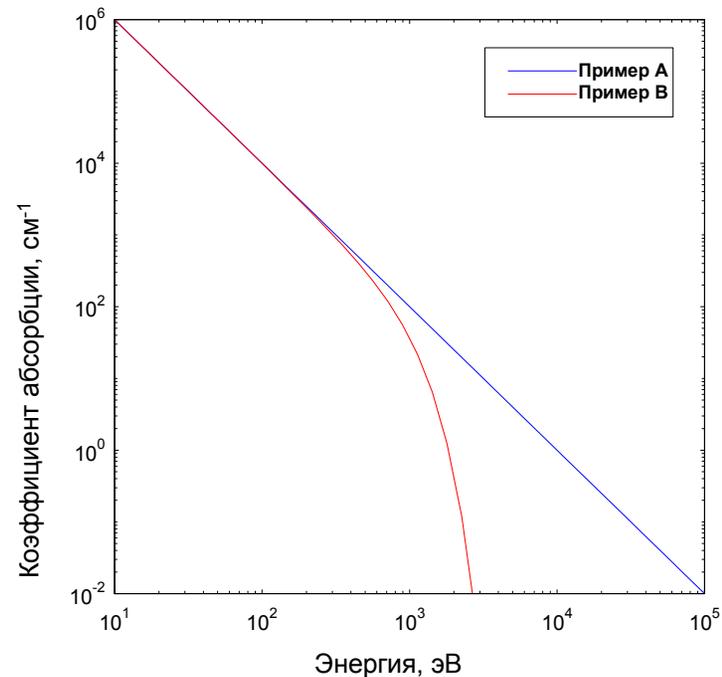
Пример А:

$$\alpha_\nu = 10^2 \nu^{-2}$$

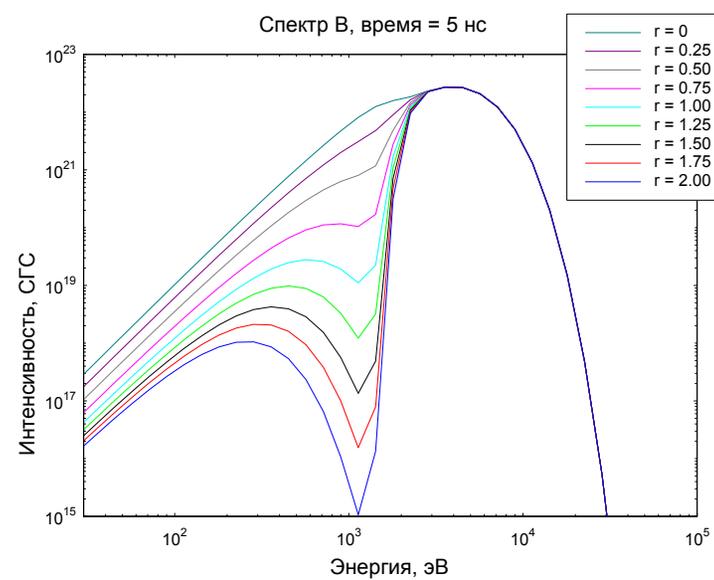
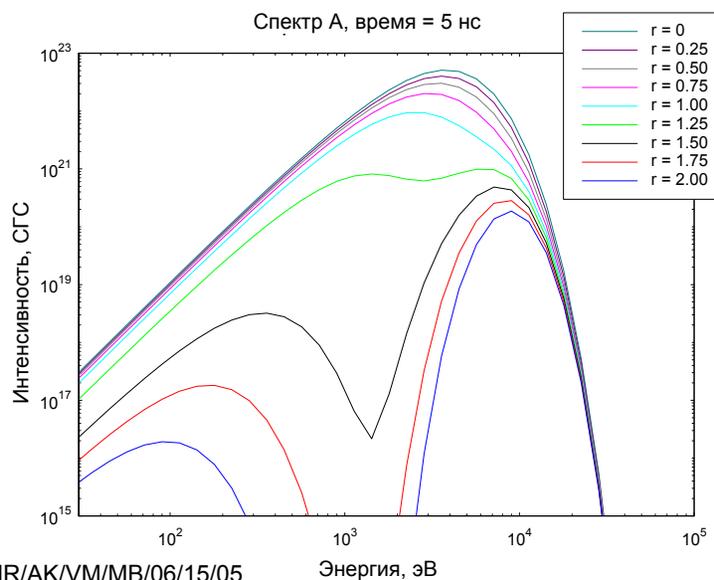
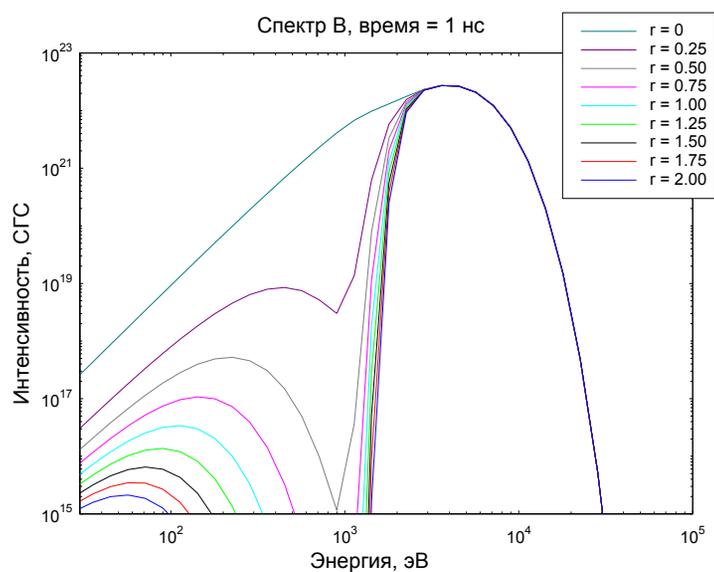
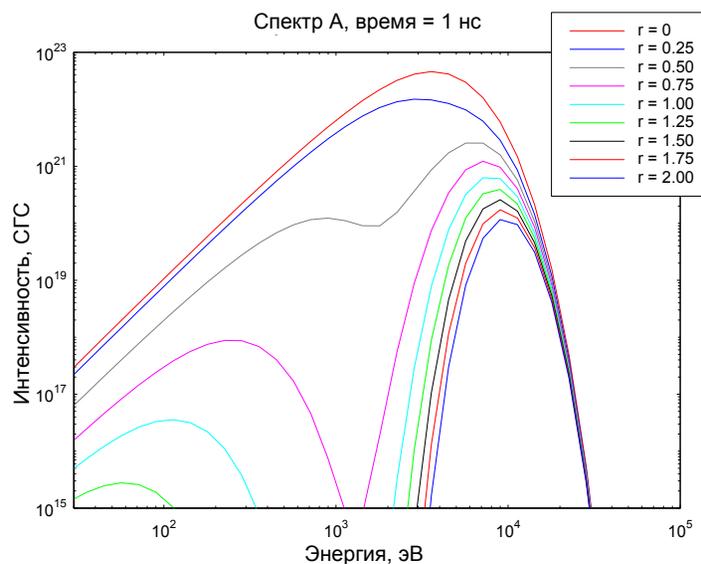
( $\nu$ , кэВ)

Пример В:

$$\alpha_\nu = 10^2 \nu^{-2} e^{-\nu^2}$$



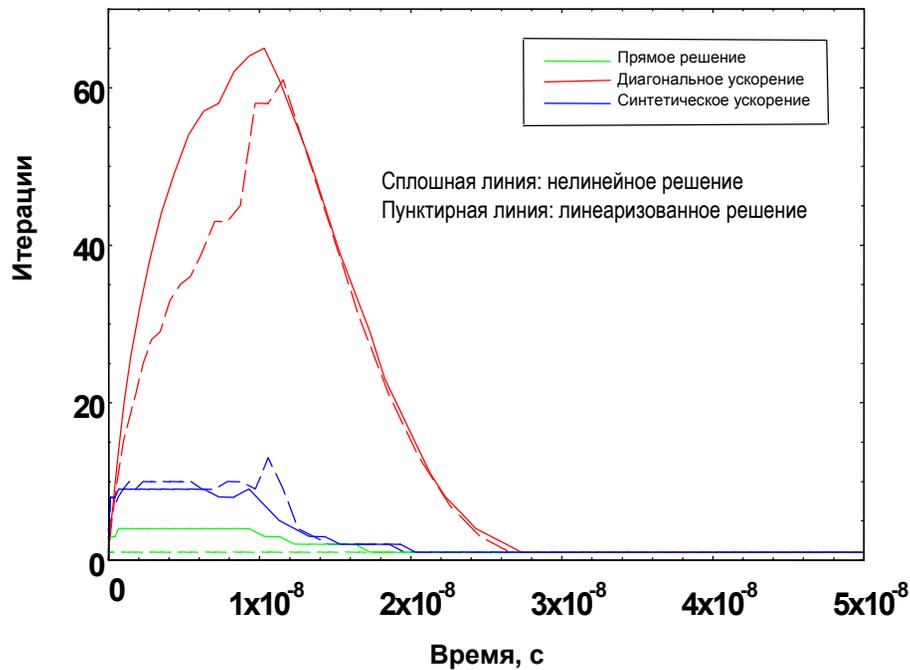
# Физическая эволюция в примерах А и В аналогична



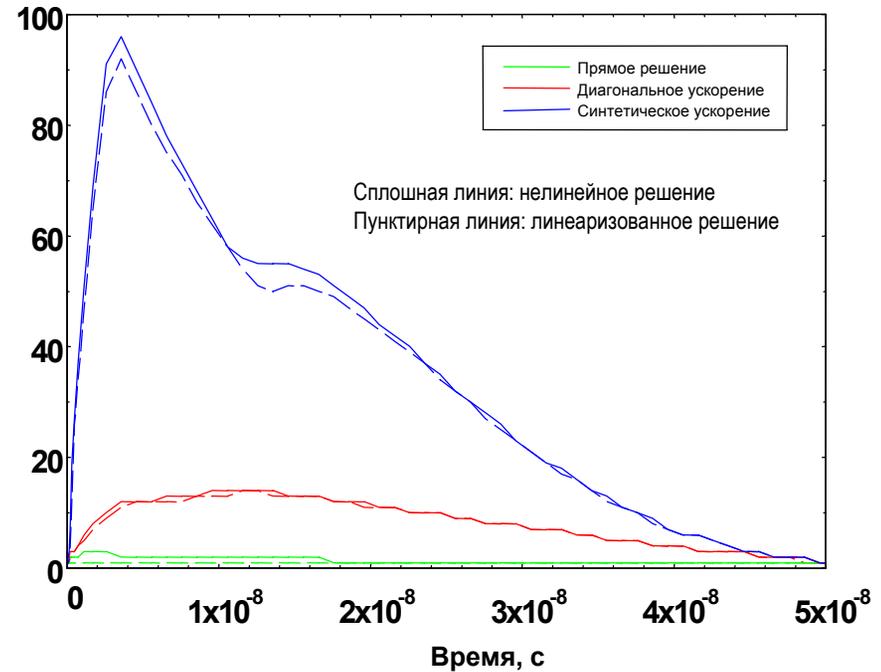
# Свойства сходимости в примерах А и В различны



### Пример А



### Пример В



# Замечания по поводу метода прямого решения

---



- Это - надежный, но медленный метод, поскольку требуется строить обратные матрицы.
- Полезен в одномерной постановке для проверки сходимости других методов (в определенном диапазоне частот).
- Реализация в двумерной и трехмерной постановках потребует быстрого проведения построения приближенной обратной матрицы.
- Эксперименты, проведенные с использованием нескольких диагоналей в качестве приближенного оператора, не дали обещающих результатов.
- Объединение этого подхода для диапазона углов с “серым” ускорением сходимости в определенном диапазоне частот может оказаться продуктивным.